

文章编号: 1006-2467(2023)02-0177-06

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2021.337

双层 Boussinesq 水波方程速度公式的修正

刘忠波¹, 韩青亮¹, 任双双¹, 王彦¹, 房克照²

(1. 大连海事大学 交通运输工程学院, 辽宁 大连 116026;

2. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 为提高 Boussinesq 水波方程中的速度精度, 以最高空间导数为 2 的双层 Boussinesq 方程为研究对象, 提出增加带有常系数的三阶项以修正速度公式. 适用水深在 $0 < kh < 8$ (k 为波数, h 为静水深) 范围内, 以方程的水平速度和垂向速度与 Stokes 线性波速度解析解的积分误差最小为目标, 优化系数取值. 在 1% 误差内, 改进公式水平速度和垂向速度的适用水深 kh 分别为 7.34 和 7.83, 均比原计算公式适用范围大. 利用数值模型对稳态波和聚焦波演化进行计算, 将最大波峰下的水平速度分别与流函数解析解和试验结果进行对比, 发现改进后的吻合程度更高, 验证了改进公式的有效性. 研究表明, 改进公式的速度精度有较大幅度提高, 该方法可为其他 Boussinesq 模型的速度场改进提供重要参考.

关键词: Boussinesq 水波方程; 速度公式; 解析解; 数值模拟

中图分类号: P 73

文献标志码: A

Modification of Velocity Formulations in a Two-Layer Boussinesq-Type Model for Water Waves

LIU Zhongbo¹, HAN Qingliang¹, REN Shuangshuang¹, WANG Yan¹, FANG Kexhao²

(1. College of Transportation Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026,

Liaoning, China; 2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering,

Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

Abstract: In order to improve the accuracy of velocity formulation in a Boussinesq-type wave model, with a two-layer Boussinesq-type model with the highest spatial derivative of 2 being chosen as the research object, a third-order term with constant coefficient is proposed to modify the velocity formulation. The coefficient is optimized by minimizing the error between the summation of the integration of horizontal and vertical velocities of the equation and that of the analytical linear Stokes wave velocity components in the range of $0 < kh < 8$ (where k is wave number, h is still water depth). At a 1% tolerance error, the applicable water depths of the modified formulations for horizontal and vertical velocities are up to $kh = 7.34$ and $kh = 7.83$, respectively, which are larger than those of the original formulations. The evolution of the steady-state wave and the focused wave is numerically simulated by using the numerical model. The horizontal velocity under the maximum surface elevation crest is in good agreements with the analytical solution of stream function and published experimental data, which verifies the effectiveness of the modified formulations. The studies show that the velocity accuracy of the improved equation is greatly

收稿日期: 2021-09-06 修回日期: 2021-12-10 录用日期: 2021-12-16

基金项目: 国家自然科学基金(52171247, 51779022, 52071057)资助项目

作者简介: 刘忠波(1976-), 副教授, 博士生导师, 现主要从事波浪水动力研究; E-mail: liuzhongbo@dlnu.edu.cn.

improved. This method provides an important reference for the improvement of velocity field of other Boussinesq-type models.

Key words: Boussinesq-type equation; velocity formulation; analytical solution; numerical simulation

波浪是近岸水域重要的水动力之一,波浪力是海洋(海岸)工程结构设计中必须考虑的环境荷载,精准预报这一波浪条件是工程设计的前提.水平波浪力是波浪压力沿水深方向的积分,与波浪波面下的速度分布息息相关,因此对速度场的研究具有重要的学术和工程应用价值.

波浪速度的研究多采用理论分析、数值模型模拟和物理模型试验模拟等方法,其中数值模型模拟省时且成本低,是最常用的方式.作为一种典型的势流模型,多数 Boussinesq 方程将复杂的三维水波问题简化为二维问题,大大降低了模型求解难度,促使这类方程在海岸波浪水动力研究中得以长足发展. Boussinesq 模型的理论发展经历了从弱非线性到强非线性等过程,最新方程的适用水深已得到大幅度拓展^[1-2],甚至在 Liu 等^[2]的研究中已完全摆脱了水深限制.文献[1]首次对两层水体中间位置的水平和垂直方向速度沿垂向坐标 z 做泰勒(Taylor)展开,进而利用计算速度取代中间位置处的速度,最终推导出最大空间导数为 3 的双层 Boussinesq 方程,该方程在 1% 误差内的最大适用水深达 $kh=53.1$ (k 为波数, h 为静水深);文献[2]进一步将文献[1]拓展成多层,并给出空间导数为 2 和 5 的多层 Boussinesq 水波方程,4 层空间导数为 5 的方程在 1% 误差下的适用水深达 $kh=7\,600$.关于 Boussinesq 水波方程在理论性能、数值格式和数值应用的研究进展可参见文献[3-5].Madsen 等^[6]的最新研究认为多数高阶 Boussinesq 水波方程因色散精度不足,存在波谷不稳定的缺点,并证明了文献[2]最高导数为 3 的 4 层水波方程的稳定范围最大.

Liu 等^[7]分析了最高空间导数为 2 的多层 Boussinesq 水波方程的线性和非线性性能,1% 误差内,2 层模型色散适用水深(相速度)可达 $kh=19.7$,而沿水深分布的水平速度的适用水深仅为 $kh=5.1$,前者是后者的 3.86 倍;3 层和 4 层色散适用水深分别是其水平速度的 3.65 倍和 2.57 倍,可见多层模型速度的适用水深远小于相速度,这一现象也存在于多数常用 Boussinesq 水波方程中.林鹏程等^[8]针对不同非线性、不同水深情况和线性入射条件,研究了最高空间导数为 3 的单层 Boussinesq 水波方程垂向分布的速度特征,得出的速度分布与

Stokes 线性波、二阶波和三阶波解析解存在一定的差异;刘必劲等^[9]采用单层 Boussinesq 水波方程模拟聚焦波和稳态波,发现单层 Boussinesq 水波方程能够胜任波面的模拟,但无法给出精确的速度轮廓.文献[8-9]采用的单层 Boussinesq 水波方程是文献[1]双层模型的简化版,相关模拟结果也说明单层 Boussinesq 水波方程的速度精度远小于色散精度.

最高空间导数为 2 的 N 层 Boussinesq 水波方程^[2]的色散关系是 Stokes 波色散关系式的 Padé $[4N-2, 4N]$ 型展开,对色散关系做泰勒展开则可确定相速度精确到 kh 的 $8N-4\sim 8N$ 次幂,而每一层速度沿水深分布的表达式中 z 的幂次仅为 2,因此 N 层方程的速度最多可精确到 kh 的 $4N$ 次幂,可见色散精度远高于速度精度.保持方程表达形式不变的情况下,如何弥补这一结果带来的差异,历史文献没有给出明确答案.因此,本文选择文献[2]中最高导数为 2 的双层 Boussinesq 水波方程作为研究对象,尝试提高速度表达式中 z 的幂次,以获得精度更高的速度场.

1 速度公式的修正

文献[2]将垂向水体分为 2 层,推导了最高导数为 2 的双层 Boussinesq 方程.在立面二维情况下,速度表达式分为从自由表面到静水位、从静水位到连接面以及连接面到水底共 3 段.

从静水位到连接面的速度场为

$$u(z) = u_1^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a1})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_1 h)^2 \right] u_{1xx}^* + (z - z_{a1}) z_{a1x} u_{1x}^* + (z - z_{a1}) w_{1x}^* + \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a1})\alpha_1 h + (z - z_{a1})^2 \right] z_{a1x} w_{1xx}^* \quad (1)$$

$$w(z) = w_1^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a1})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_1 h)^2 \right] w_{1xx}^* + (z - z_{a1}) z_{a1x} w_{1x}^* - (z - z_{a1}) u_{1x}^* - \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a1})\alpha_1 h + (z - z_{a1})^2 \right] z_{a1x} u_{1xx}^* \quad (2)$$

式中: u , w 为水平、垂向速度; z 为垂向坐标,0 点起始置于静水位处,向上为正; u_1^* , w_1^* 为上层水体的水平、垂向计算速度,其与真实速度存在一个明确的数学表达关系式,引入计算速度的核心目的是改善方程的色散性能;下标 x 为对 x 求 1 次导,下标 xx 为

对 x 求 2 次导; $z_{a1} = -\alpha_1 h$, $z_{a2} = -(2\alpha_1 + \alpha_2)h$, α_1 和 α_2 是色散参数,满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0.5$.

从连接面到水底的速度场为

$$u(z) = u_2^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a2})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_2 h)^2 \right] u_{2xx}^* + (z - z_{a2}) z_{a2x} u_{2x}^* + (z - z_{a2}) w_{2x}^* + \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a2}) \alpha_2 h \left(1 - \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 + \alpha_2} \right) + (z - z_{a2})^2 \right] z_{a2x} w_{2xx}^* \quad (3)$$

$$w(z) = w_2^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a2})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_2 h)^2 \right] w_{2xx}^* + (z - z_{a2}) z_{a2x} w_{2x}^* - (z - z_{a2}) u_{2x}^* - \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a2}) \alpha_2 h \left(1 - \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 + \alpha_2} \right) + (z - z_{a2})^2 \right] z_{a2x} u_{2xx}^* \quad (4)$$

式中: u_2^* , w_2^* 为下层水体的水平和垂向速度.

从自由表面到静水位的速度场为

$$u(z) = u_{10} + z w_{10x} - \frac{1}{2} z^2 u_{10xx} \quad (5)$$

$$w(z) = w_{10} - z u_{10x} - \frac{1}{2} z^2 w_{10xx} \quad (6)$$

式中: u_{10} , w_{10} 分别为静水位处的水平和垂向速度.

利用式(1)~(6)可以计算整个水体内的速度,而控制方程的表达形式保持不变^[2,7],以下简称文献[2]公式.为提高速度精度,在表达式(1)~(4)中引入乘以常数的 3 阶项,速度表达式可改写为

$$u(z) = u_1^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a1})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_1 h)^2 \right] u_{1xx}^* + (z - z_{a1}) z_{a1x} u_{1x}^* + (z - z_{a1}) w_{1x}^* + \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a1}) \alpha_1 h + (z - z_{a1})^2 \right] z_{a1x} w_{1xx}^* - \beta \left[\frac{1}{6}(z - z_{a1})^3 - \frac{1}{6}(\alpha_1 h)^2 (z - z_{a1}) \right] w_{1xxx}^* \quad (7)$$

$$w(z) = w_1^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a1})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_1 h)^2 \right] w_{1xx}^* + (z - z_{a1}) z_{a1x} w_{1x}^* - (z - z_{a1}) u_{1x}^* - \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a1}) \alpha_1 h + (z - z_{a1})^2 \right] z_{a1x} u_{1xx}^* + \beta \left[\frac{1}{6}(z - z_{a1})^3 - \frac{1}{6}(\alpha_1 h)^2 (z - z_{a1}) \right] u_{1xxx}^* \quad (8)$$

$$u(z) = u_2^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a2})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_2 h)^2 \right] u_{2xx}^* + (z - z_{a2}) z_{a2x} u_{2x}^* + (z - z_{a2}) w_{2x}^* + \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a2}) \alpha_2 h \left(1 - \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 + \alpha_2} \right) + (z - z_{a2})^2 \right] z_{a2x} w_{2xx}^* - \beta \left[\frac{1}{6}(z - z_{a2})^3 - \frac{1}{6}(\alpha_2 h)^2 (z - z_{a2}) \right] w_{2xxx}^* \quad (9)$$

$$w(z) = w_2^* - \left[\frac{1}{2}(z - z_{a2})^2 - \frac{1}{6}(\alpha_2 h)^2 \right] w_{2xx}^* + (z - z_{a2}) z_{a2x} w_{2x}^* - (z - z_{a2}) u_{2x}^* + \left[-\frac{1}{3}(z - z_{a2}) \alpha_2 h \left(1 - \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 + \alpha_2} \right) + (z - z_{a2})^2 \right] z_{a2x} u_{2xx}^* + \beta \left[\frac{1}{6}(z - z_{a2})^3 - \frac{1}{6}(\alpha_2 h)^2 (z - z_{a2}) \right] u_{2xxx}^* \quad (10)$$

式中: β 为常系数,其取值需通过与速度解析解做优化获取.式(7)~(10)中最后一项是 3 阶导数项的修正,此 3 阶项可在方程推导过程中直接得到.当速度位于 $z = z_{a1}$, $z = z_{a2}$ 时,该项自动为 0;当不在这两处时,乘以 β 后相当于修正.式(5)~(10)简称为改进公式.

Sun 等^[10]研究发现,当色散参数 α_1 取值范围在 0.13~0.25 时,方程的相速度、变浅性、二阶非线性和三阶非线性等性能在 $0 < kh < 10$ 间,均具有较高精度.不失一般性,本文选用 Liu 等^[7]给出的系数值 $\alpha_1 = 0.172$,相应的 $\alpha_2 = 0.328$.为确定新的系数,将方程速度场与 Stokes 线性波速度场做比较,以水深范围 $0 < kh < (kh)_{\max}$ 内垂向速度误差 $F_w(kh)$ 与水平速度误差 $F_u(kh)$ 的和最小为标准,即

$$F_v((kh)_{\max}) = \frac{1}{(kh)_{\max}} \int_0^{(kh)_{\max}} [(F_u(kh))^2 + (F_w(kh))^2] d(kh) \quad (11)$$

水平速度误差和垂直速度误差采用 Liu 等^[2]给出的表达式

$$F_u(kh) = \sqrt{\frac{1}{h} \int_{-h}^0 \left(\frac{u(z) - u_s(z)}{u_s(0)} \right)^2 dz} \quad F_w(kh) = \sqrt{\frac{1}{h} \int_{-h}^0 \left(\frac{w(z) - w_s(z)}{w_s(0)} \right)^2 dz} \quad (12)$$

式中: $u_s(0)$ 和 $w_s(0)$ 为静水位处的水平和垂向速度; $u_s(z)$ 和 $w_s(z)$ 为 Stokes 线性波速度场.取 $0 < kh < 8$,利用上式可优化得到 $\beta = 0.78$.

将本文的改进公式与文献[2]中的公式计算结果比较,如图 1 和图 2 所示.由图可见,误差在 1% 内,改进公式的水平速度和垂向速度的最大适用水深分别为 $kh = 7.34$ 和 $kh = 7.83$,均超过文献[2]中公式的最大适用水深 $kh = 5.1$ (水平速度)和 $kh = 4.5$ (垂向速度),表明改进公式在理论层面上是有效的.

为进一步对比文献[2]中公式和改进公式的差异,给出 $kh = 3.0, 6.0, 9.0$ 时,沿垂向的速度分布与 Stokes 线性波速度解析解,如图 3 所示.伴随水深 kh 的增大,改进公式与文献[2]公式的差异也会越

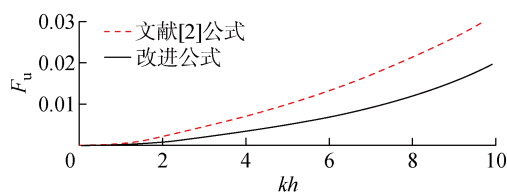


图 1 水平速度的积分误差

Fig. 1 Integrated error of horizontal velocity along water depth

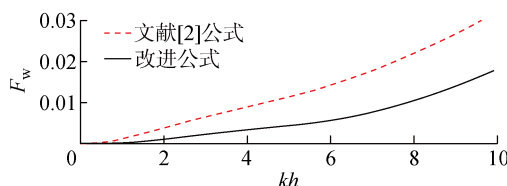


图 2 垂向速度的积分误差

Fig. 2 Integrated error of vertical velocity along water depth

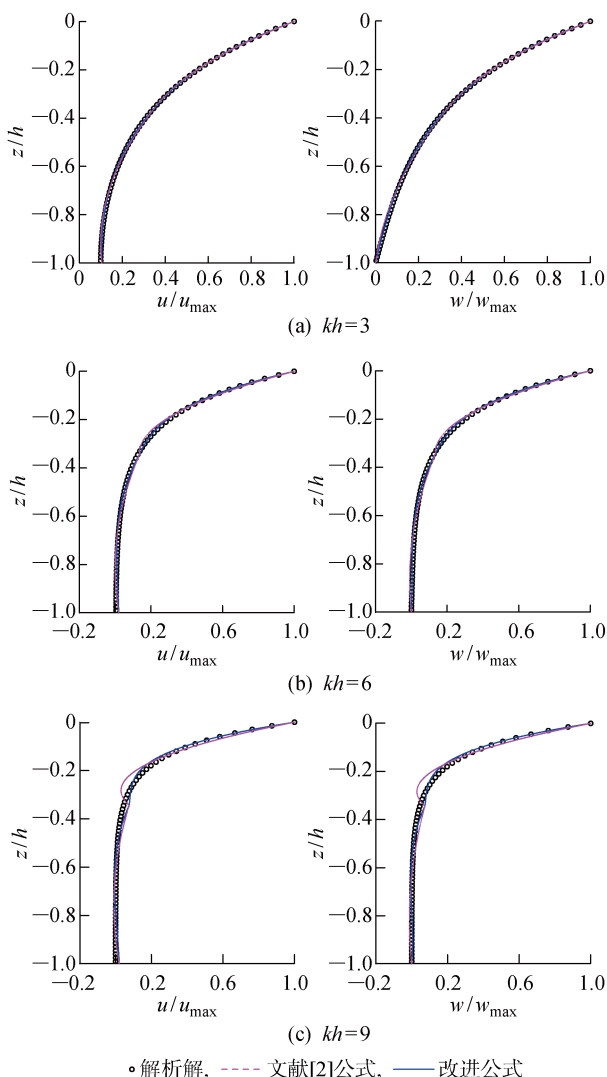


图 3 水平和垂向速度与 Stokes 线性波解析解比较

Fig. 3 Comparisons of velocity profiles between numerical results and Stokes linear wave solution

来越明显,解析解与本文改进公式的结果吻合程度更高.

2 数值模型及验证

2.1 数值模型

本文数值模型依赖的方程和文献[2]中原始方程相同,对应的数值模型在时间差分格式上采用了混合 4 阶 Adams-Bashforth-Moulton 的时间步进格式,空间差分格式采用中心差分格式,边界点上采用偏差公式.根据实际计算情况,可考虑在入射边界上采用线性边界造波技术、边界松弛造波技术或在域内采用内部造波技术,在传出边界上采用海绵边界层吸收波浪,具体过程可参考文献[2,7,11].

2.2 与流函数波浪速度场的比较

图 3 仅给出了线性波条件的速度解析对比,对于较强非线性情况下的速度场是否能够胜任,还需通过数值模拟加以印证.以流函数波浪速度为比较对象,利用解析解验证改进前后计算结果的差异,进一步验证本文公式的有效性.

设计静水深 h 分别为 50 m 和 70 m 的两个工况,流函数波浪周期为 $T=6$ s、波高 $H=5$ m.数值模拟中, L 为流函数波浪对应的非线性波长,计算区域采用 $10L$,空间步长采用 $L/32$,时间步长采用 0.05 s.改进公式和文献[2]公式计算结果与解析解的比较如图 4 所示,其中 c 为流函数波浪的相速度.与文献[2]公式相比,改进公式计算得到的速度场与解析解吻合程度更佳,特别是在水深为 70 m 时,波浪流函数的波长为 60.171 m,反算得出 $kh=7.31$.结合图 1,当 $kh=7.31$ 时,文献[2]公式的水平速度积分误差为 1.83%,远大于改进公式的积分误差 0.99%.数值结果表明,改进的速度场计算结果明显优于文献[2]公式的结果.

2.3 聚焦波最大波峰面下的水平速度剖面

Baldock 等^[12]进行了深水聚焦波演化试验的研究,将最大和最小周期分为 29 份,每个频率的波幅取值相同,其中 B 组为宽谱, $T=0.6\sim 1.4$ s, $kh=1.568\sim 7.825$;D 组为窄谱, $T=0.8\sim 1.2$ s, $kh=2.026\sim 4.403$.

为了模拟聚焦波生成的全过程,在入射边界处引入与试验类似的线性叠加方式,将整个数值计算域设为 24 m,空间步长为 0.04 m,时间步长为 0.01 s,末端设置 4 m 的海绵边界层以消波,总模拟时间为 40 s,设定聚焦波峰面为 55 mm 的 B 组与 D 组进行数值模拟. Liu 等^[7]已建立了 2 层、3 层和 4 层水波模型,模拟了文献[12]中 D55 和 B55 这两组

非线性较强的工况,因波面计算结果仍与文献结果保持一致,故不再重复给出相关结果,本文重点比较改进公式和文献[2]公式的计算结果与这两组工况的试验结果,如图 5~6 所示。

由图可见,改进公式优于文献[2]公式的计算结果。D55 窄谱情况下,波数范围在 $kh = 2.026 \sim 4.403$ 之间,结合图 1 结果可知,文献[2]中水平速度在 1% 误差内适用的最大水深为 $kh = 5.1$,表明文献[2]公式也能满足所有频率的垂向积分误差都低于 1%。因此,针对 D55 工况,改进前后的计算结果不存在明显差异。B55 宽谱情况下,波数范围在 $kh = 1.568 \sim 7.825$ 之间,结合图 1 结果可知,在 1% 误差内,文献[2]中水平速度计算公式不能涵盖全部频

域, $kh = 7.825$ 的误差约为 2%,本文水平速度在 1% 误差内适用的最大水深为 $kh = 7.34$, $kh = 7.825$ 的误差约为 1.14%,可见改进公式的多数频率范围的误差均能控制在 1% 左右,因此得到的速度剖面更为精确。在自由表面(波面)附近的结果比试验结果大,一方面数值模拟中的衰减现象比物理模型试验中的衰减现象弱;另一方面,物理模型试验中的测量方法很难精确捕捉到自由表面处的速度,其他一些学者采用势流理论模型进行求解也得到类似结果。在水底附近数值模拟的水平速度与试验结果存在一定差异,主要是数值模拟采用 Boussinesq 水波方程,其在物理机制上与物理模型试验中的衰减现象并不完全一致。

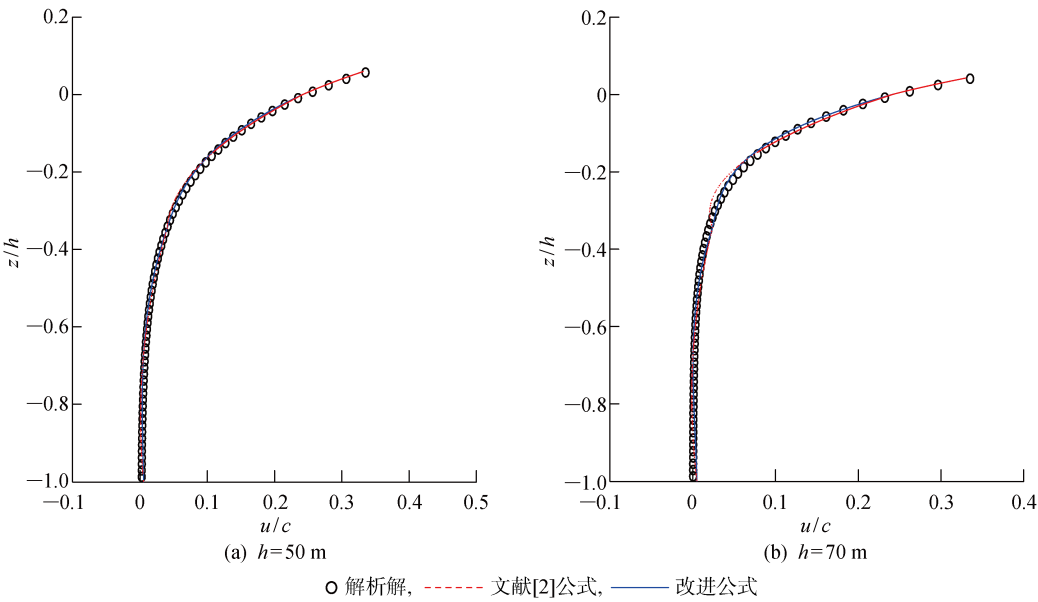


图 4 计算波峰面下的速度场与波浪流函数解析速度场比较

Fig. 4 Comparison of computed velocity profile with analytical solution of wave stream function under wave crest

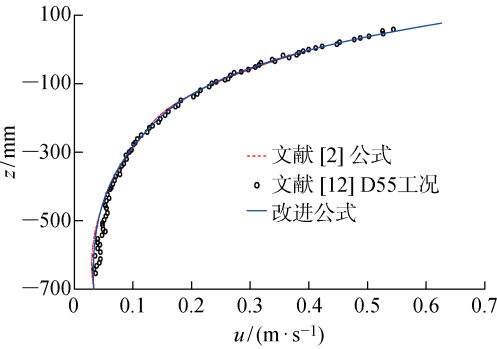


图 5 文献[2]公式和改进公式的计算水平速度剖面与 D55 工况试验结果的比较

Fig. 5 Comparisons of calculated horizontal velocity profiles from the present formula and the original formula with D55 experimental data

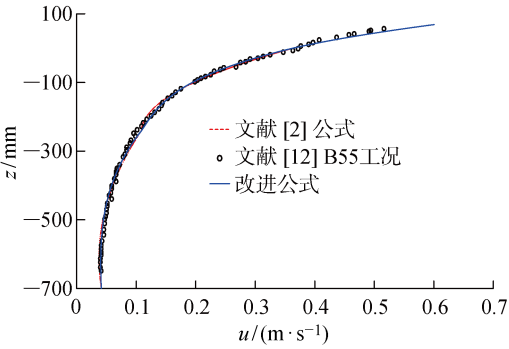


图 6 文献[2]公式和改进公式的计算水平速度剖面与 B55 工况试验结果的比较

Fig. 6 Comparisons of calculated horizontal velocity profiles from the present formula and the original formula with B55 experimental data

3 结论

提出一种改进方程速度精度的方法,即在双层 Boussinesq 水波方程的速度公式基础上,引入带有常数 β 的三阶项,不改变原始 Boussinesq 水波方程,利用新的公式即可获取更高精度的速度场.通过理论分析和数值验证,主要得出以下结论:

(1) 双层 Boussinesq 水波方程的速度场可以在一定程度上得到改进,常数 $\beta=0.78$ 时,在 1% 误差内,水平速度和垂向速度的最大适用水深得到了较大幅度改进,其中水平速度由原来的 $kh=5.1$ 提高到 $kh=7.34$,垂向速度由原来的 $kh=4.5$ 提高到 $kh=7.83$.

(2) 利用模型模拟强非线性聚焦波和流函数波浪(稳态波)演化,发现改进的水平速度剖面与试验结果的吻合度更高,从数值角度展示了理论改进方式的有效性.

此外,本文的改进方法可为其他 Boussinesq 水波方程改进提供重要参考,有关详细的分析与讨论有待更深入的研究.

参考文献:

- [1] LIU Z B, FANG K Z. A new two-layer Boussinesq model for coastal waves from deep to shallow water: Derivation and analysis[J]. **Wave Motion**, 2016, 67: 1-14.
- [2] LIU Z B, FANG K Z, CHENG Y Z. A new multi-layer irrotational Boussinesq-type model for highly nonlinear and dispersive surface waves over a mildly sloping seabed[J]. **Journal of Fluid Mechanics**, 2018, 842: 323-353.
- [3] KIRBY J T. Boussinesq models and their application to coastal processes across a wide range of scales[J]. **Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering**, 2016, 142(6): 03116005.
- [4] 张尧, 谢欣, 陶爱峰, 等. Boussinesq 相位解析的海岸水动力学数学模型研究进展[J]. **海洋通报**, 2018, 37(5): 481-493.
ZHANG Yao, XIE Xin, TAO Aifeng, *et al.* Review of Boussinesq phase-resolving coastal hydrodynamic model[J]. **Marine Science Bulletin**, 2018, 37(5): 481-493.

- [5] 孙家文, 房克照, 刘忠波, 等. 关于 Boussinesq 型水波方程理论和应用研究的综述[J]. **海洋学报**, 2020, 42(5): 1-11.
SUN Jiawen, FANG Kezhao, LIU Zhongbo, *et al.* A review on the theory and application of Boussinesq-type equations for water waves[J]. **Acta Oceanologica Sinica**, 2020, 42(5): 1-11.
- [6] MADSEN P A, FUHRMAN D R. Trough instabilities in Boussinesq formulations for water waves[J]. **Journal of Fluid Mechanics**, 2020, 889: A38.
- [7] LIU Z B, FANG K Z, SUN J W. A multi-layer Boussinesq-type model with second-order spatial derivatives: Theoretical analysis and numerical implementation [J]. **Ocean Engineering**, 2019, 191: 106545.
- [8] 林鹏程, 刘忠波, 刘勇. 基于 Boussinesq 数值模型的波浪速度垂向分布模拟研究[J]. **海洋湖沼通报**, 2021, 43(4): 7-15.
LIN Pengcheng, LIU Zhongbo, LIU Yong. Simulation of vertical distribution of wave velocity field based on Boussinesq numerical model[J]. **Transactions of Oceanology and Limnology**, 2021, 43(4): 7-15.
- [9] 刘必劲, 张振伟, 刘忠波, 等. 基于 Boussinesq 水波模型的聚焦波模拟[J]. **海洋学报**, 2021, 43(3): 31-39.
LIU Bijin, ZHANG Zhenwei, LIU Zhongbo, *et al.* Simulating the evolution of a focused wave group by a Boussinesq-type model[J]. **Haiyang Xuebao**, 2021, 43(3): 31-39.
- [10] SUN J W, LIU Z B, WANG X G, *et al.* Effect of the coefficient on the performance of a two-layer boussinesq-type model[J]. **China Ocean Engineering**, 2021, 35(1): 36-47.
- [11] LIU Z B, FANG K Z. Numerical verification of a two-layer Boussinesq-type model for surface gravity wave evolution[J]. **Wave Motion**, 2019, 85: 98-113.
- [12] BALDOCK T E, SWAN P H, TAYLOR. A laboratory study of nonlinear surface waves on water[J]. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, 1996, 354: 649-676.

(本文编辑:孙启艳)