

文章编号: 1006-2467(2004)07-1222-03

# 自然单元法原理与三维算法实现

戴 斌, 王建华

(上海交通大学 土木工程系, 上海 200030)

**摘 要:** 自然单元法是一种新兴的无网格数值计算方法,其实质是基于自然相邻插值( $C^0$ )的伽辽金法.文中推导了基于 Lasserre凸多面体体积公式的三维自然邻结点坐标及其导数的算法,给出了三维自然单元法算法的流程图.该算法实际上可以用于任意维数的自然单元法计算.对于 Lasserre算法带来的多余约束问题,提出了 2种可行的解决算法.经验证算例,三维自然单元法的计算结果精度同六面体单元有限元法相当.

**关键词:** 自然单元法;自然相邻插值;Delaunay三角化;伽辽金法

**中图分类号:** O 242.21 **文献标识码:** A

## The Natural Element Method and Its Computational Algorithms in Three Dimensions

DAI Bin, WANG Jian-hua

(Dept. of Civil Eng., Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030, China)

**Abstract:** Natural element method(NEM) is a recently developed meshless method and is essentially the Galerkin method based on natural neighbour interpolation. The algorithm for calculating natural neighbour coordinates and their derivatives based on Lasserre's algorithm for the volume of a convex polyhedron was derived and the generalized flowchart for NEM in 3D case was presented. The algorithm can be applied to NEM in any dimensions case in fact. Two algorithms to solve the redundant constraint problem lying in Lasserre's algorithm were also presented. The example's numerical results are equal to the results of hexahedral finite element method.

**Key words:** natural element method(NEM); natural neighbour interpolation; Delaunay triangulation; Galerkin method

自然单元法是一种无网格法<sup>[1]</sup>,它采用 Delaunay 三角形或四面体背景积分网格,而计算精度与四边形或六面体网格的有限元法相当,收敛速度比一般的无网格方法有大幅度提高.由于自然相邻插值在凸域边界上的相邻点之间是严格线性的,所以自然单元法在边界面的处理也相当简单.

本文基于 Lasserre方法<sup>[2]</sup>计算自然相邻结点的

插值函数及其导数,在 Sambridge算法<sup>[3]</sup>的基础上,重新推导并实现了自然单元法的三维算法,并提出两种方法解决 Lasserre算法带来的多余约束问题,使得该算法具有通用性

### 1 自然单元法原理

自然单元法与一般有限元法的主要区别在于插

收稿日期: 2003-04-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59879012)

作者简介: 戴 斌(1978-),男,安徽蚌埠人,硕士,主要研究方向为自然单元法原理及其实现.王建华(联系人),男,教授,博士生导师,

电话(Tel.): 021-62932915; E-mail: wjh417@sjtu.edu.cn

值函数的构造.自然单元法的插值函数依赖于二次 Voronoi 结构的构造.下面以二维分析区域为例说明自然单元法的原理.

1.1 Delaunay三角化和 Voronoi结构

对一个任意几何形状的分析区域  $K$ ,先在区域上按照一定规则布置离散的计算点.按照 Delaunay 空圆原则,即每个三角形的外接圆不包含其他任何结点,完成区域离散点的 Delaunay 三角形网格化,并根据三角化网格建立区域  $K$  的 Voronoi 结构.

1.2 插值函数

自然单元法的单元刚度矩阵计算采用高斯积分,插值函数也是围绕高斯点来建立的.首先要查找高斯点  $g$  的自然邻结点:如果高斯点  $g$  位于任何 Delaunay 三角形外接圆内部,则该 Delaunay 三角形是高斯点  $g$  的自然相邻三角形,该三角形的顶点为高斯点  $g$  的自然邻结点.然后建立高斯点  $g$  周围的二次 Voronoi 结构,如图 1 所示.

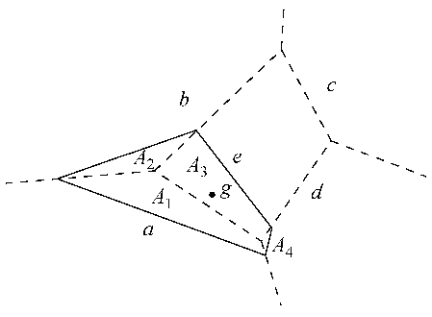


图 1 点  $g$  周围的二次 Voronoi 结构  
Fig. 1 Second-order Voronoi cells around  $g$   
高斯点  $g$  的插值函数可表示为

$$\Phi_i(x) = A_i(x) \sum_k A_k(x) \quad (1)$$

式中,  $A_i$  为自然相邻三角形的面积.  
定义了关于各自然邻结点的自然相邻坐标后,高斯点  $g$  的位移函数可写为

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) u_i \quad (2)$$

式中:  $u_i (i=1, 2, \dots, n)$  为点  $x$  周围自然邻结点  $i$  (对于高斯点  $g$  为  $a, b, c, d$ ) 的结点位移;  $\Phi_i(x)$  为对应结点的插值函数.

自然单元法的插值函数有以下性质:

(1)  $\Phi_i(x)$  满足单位分解的条件:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(x) = 1 \quad x \in K \quad (3)$$

(2) 方程 (2) 的  $\Phi_i(x)$  与有限单元插值函数一样,满足

$$\begin{cases} 0 \leq \Phi_i(x) \leq 1 \\ \Phi_j(x_j) = W_j \end{cases} \quad x \in K \quad (4)$$

式中,  $W_j$  为 Kronecker 符号.当  $i=j$  时,  $W_j=1$ ;  $i \neq j$  时,  $W_j=0$ .

(3) 自然单元法插值函数的结点上  $C^0$  (函数) 连续外,而在其他地方均为  $C^\infty$  (任意阶导数) 连续.

2 三维自然邻结点坐标及导数算法

自然邻结点坐标及其导数的计算是自然单元法有别于有限元法最关健的地方. Watson 的面积叠加算法可以有效地解决二维问题自然邻结点坐标及其导数的计算,但是无法推广到三维问题.本文推导了以 Lasserre<sup>[2]</sup>提出的多面体体积计算公式为基础的算法.理论上说,该算法可以用于任意维问题自然邻结点坐标及其导数的计算.

2.1 体积定义

Lasserre 提出的算法是根据凸多面体体积的定义公式:

$$Ax \leq b \quad (5)$$

式中:  $x \in R^r$ ;  $A$  为  $(m+1, n)$  矩阵;  $b$  为  $m+1$  维向量,  $m+1$  为高斯点  $g$  的自然邻结点数,  $n$  为空间维度.

多面体体积计算的递归公式为

$$V(n, A, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|a_{ii}|} V_{ii}(n-1, \tilde{A}_i, \tilde{b}_i) \quad (6)$$

式中:  $\tilde{A}_i$  为矩阵  $A$  的约化矩阵;  $\tilde{b}_i$  为向量  $b$  的约化向量;  $b_i$  为  $b$  的第  $i$  个元素;  $a_{ii}$  为  $\tilde{A}_i$  的元素.

2.2 多余约束

递归过程中,可能出现多余约束使得计算发生错误,即矩阵  $A$  第  $i$  行元素全部为零的情况 ( $\{a_i\}=0$ ).有 2 种算法可以解决该问题:

(1) Lasserre 建议对式 (5) 中向量  $b$  初始值的每个元素加上一个非常小的正随机值.

(2) 递归计算  $\tilde{A}_i$  和  $\tilde{b}_i$  时,检查是否存在同比例的  $i, j$  行:

$$\{a_i\} = \lambda \{a_j\}, \quad b_i = \lambda b_j \quad (7)$$

式中:  $\lambda$  为正随机值;  $a_i, a_j$  为矩阵  $A$  的元素;  $b_i, b_j$  为  $b$  的元素.

如果存在同比例的行,且  $i > j$ ,则对  $\tilde{b}_i$  作如下处理:如果  $\lambda > 0$ ,  $\tilde{b}_i$  赋值为  $-1$ ;  $\lambda < 0$ ,  $\tilde{b}_i$  赋值为  $0$ .如果  $i < j$ ,  $\tilde{b}_i$  赋值为  $0$ .

递归过程中,当  $\{a_i\}=0$  时:如果  $b < 0$ ,则该递归分支返回  $V=0$ ;如果  $b \geq 0$ ,则略过该行元素计算 ( $V'_{ii}=0$ ),继续下一行.

算法 (2) 需要对约化矩阵和约化向量中的元素

进行大量乘法运算.但是,如果采用一些编程技巧,可以减少一部分计算量.考虑到该算法不影响计算精度,而且程序具有通用性,因此,在自然单元法计算中推荐使用该算法.

### 2.3 自然相邻坐标及其导数

采用式(6)依次计算高斯点  $g$  的  $m+1$  个二次 Voronoi 多面体体积  $V_j$ ,可以很容易得到  $g$  点对应的自然相邻坐标:

$$H_j(x) = V_j \sum_k V_k \quad (8)$$

式中,  $V_j$ ,  $V_k$  分别为对应  $j$ ,  $k$  的体积.

对式(8)求偏微分可得自然坐标的导数公式:

$$\frac{\partial H_j}{\partial x_s} = \sum_k \frac{1}{V_k} \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_s} - H_j \sum_k \frac{\partial V_k}{\partial x_s} \right] \quad (9)$$

$s = 1, 2, 3$

## 3 平衡离散方程及实现

### 3.1 平衡离散方程

采用 Galerkin 过程建立系统平衡方程,可以得到自然单元法的平衡离散方程:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为总刚度矩阵.第  $I$  行  $J$  列单元刚度矩阵及荷载向量:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_K \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J dK \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_I = \int_{S^e} H_I P dS + \int_K H_I F dK \quad (12)$$

式中:  $\mathbf{D}$  为三维弹性矩阵;  $\mathbf{B}_I$ ,  $\mathbf{B}_J$  为应变矩阵;  $F$  为体力分量;  $P$  为边界上给定的载荷分量;  $S^e$  为力的作用边界.

### 3.2 三维自然单元计算流程

(1)根据 Delaunay 算法将三维域  $K$  剖分为四面体单元形式.对每个 Delaunay 四面体单元的所有高斯点:首先搜索该高斯点的自然相邻单元和自然邻结点,由式(8)(9)计算该高斯点处的插值函数及其导数;然后由式(11)计算单元刚度矩阵.集成总刚度矩阵;最后处理载荷信息和边界条件.

(2)求解方程(10),得到结点的位移向量  $\mathbf{u}$ .

(3)根据  $\mathbf{u}$  求解  $K$  内任一点位移、应力、应变.

## 4 算例

算例中悬臂梁长度 80 cm,截面宽度、高度均为 10 cm.右端受集中力  $P = 2$  kN,不考虑自重.采用四点 Hammer 积分.分别采用单元尺寸等于 5 的自然单元法、四面体单元和六面体单元有限元法网格划分,计算得沿梁中心线结点处挠度与解析解相比

较的误差百分比如图 2 所示.图中  $W$  为计算误差.

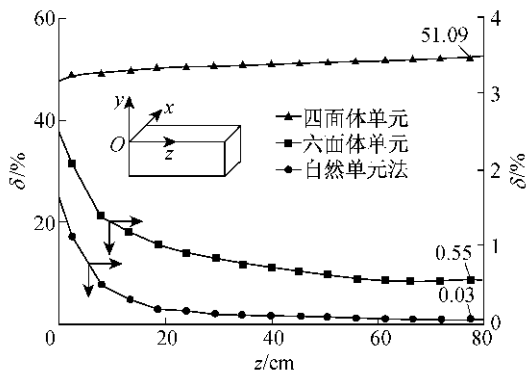


图 2 悬臂梁沿  $x=0, y=0$  轴线上  $x$  向位移误差比较

Fig. 2 Comparison of deflection error at  $x=0, y=0$  for the cantilever beam problem

从图 2 可见,本算例较粗的网格划分下,四面体单元有限元法挠度值仅相当于精确解的  $1/2$  左右,而自然单元法的计算精度比同样网格划分(背景积分网格)的四面体单元有限元有极大的提高.其计算精度和六面体单元有限元的计算精度相当接近,和解析解相比误差均非常小.悬臂梁自由端中心点处自然单元法、四面体单元及六面体单元有限元计算得到的挠度值与解析解相比,误差分别为 0.03%、51.09%、0.55%.

## 5 结语

本文采用的自然邻结点插值函数及导数的计算是基于 Lasserre 提出的多面体体积计算公式,该方法实际上可以用于任意维度的自然单元法计算.本文在 Sambridge 算法<sup>[3]</sup>的基础上重新推导并加入了考虑多余约束问题的算法,使得该算法具有通用性.

自然单元法用无网格方法的思想在全域构造插值函数,且其网格划分可以采用成熟的 Delaunay 算法全自动完成.对于软件用户来说,它是一种实用的无网格方法.而在一般的有限元计算中,则可以和四边形或者六面体单元联合使用,利用其精度高的优势,改善边界使用有限元三角形或六面体单元边界拟和时计算精度不高的缺点.另外,可以尝试以别的计算效率更高的多面体体积算法<sup>[4]</sup>为基础,进一步提高自然相邻坐标及导数算法,以提高三维自然单元法算法效率.

致谢 感谢同济大学蔡永昌博士后,澳大利亚国立大学的 Malcolm Sambridge 教授和法国 LASS 实验室的 Jean Bernard Lasserre 教授在自然单元法研究中所提供的帮助.

(下转第 1228 页)

造,发生诸如脱水、碳化等物理化学变化.岩体内部升降温过程的渐变性及非均匀性,导致原升裂纹的扩展和新裂纹的形成与发育等,从而影响岩体内声波传播速度.

### 3 结 论

(1) 岩样经历高温作用后,超声波波速会显著下降,主要原因是:岩样受热,孔隙中的自由水蒸发为水蒸气,由于超声波在不同的传播介质中的波速明显不同,故岩样经受高温作用后波速明显下降;岩样加温后,孔隙体积会增大,阻碍超声波在固体中的直线传播,导致波速下降;岩样内部在常温下已大量发育的裂隙,在温度作用下进一步发育,数量明显增加;岩样经历高温后,已经从原先的坚硬致密的脆性材料逐渐转化为结构较为疏松的延性材料,超声波可以反映岩样自身的特性转变,波速的下降正是因为试样材性发生了显著的变化.

(2) 在同一温度作用下,大理岩超声波传播速度随轴向作用荷载的增大而增大.测试结果与实验过程中所观察到岩石试样裂纹的闭合特征吻合良好.

#### 参考文献:

[1] 王让甲. 声波岩石分级和岩石动弹性力学参数的分析研究 [M]. 北京: 地质出版社, 1997.

[2] 方 华, 伍向阳, 杨 伟. 岩石中裂纹对弹性波速度的影响 [J]. 地球物理学进展, 1998, 13(4): 79– 83.  
FANG Hua, WU Xiang-yang, YANG Wei. Effect of micro-crack in rock to ultrasonic velocity [J]. **Advance of Geophysics**, 1998, 13(4): 79– 83.

[3] 赵明阶, 徐 蓉. 岩石声学特性研究现状及展望 [J]. 重庆交通学院学报, 2000, 19(2): 79– 85.  
ZHAO Ming-jie, XU Rong. Present state and perspectives of research on ultrasonic characteristic of rock [J]. **Journal of Chongqing Jiaotong Institute**, 2000, 19(2): 79– 85.

[4] 沈明荣. 岩体力学 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.

[5] 赵志丹, 高 山, 骆庭川, 等. 秦岭和华北岩石纵波速度及其对地壳低速层成因的启示 [A]. 第 30 届国际地质大会论文集 [C]. 北京: 地质出版社, 1999.

[6] 赵明阶, 吴德伦. 单轴受荷条件下岩石的声学特性模型与实验研究 [J]. 岩土工程学报, 1999, 21(5): 540– 545.  
ZHAO Ming-jie, WU De-lun. Experimental study on the ultrasonic characteristic of rock under uni-axle loading [J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 21(5): 540– 545.

[7] 中国机械工程学会无损检测分会. 超声波检测 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.

[8] 西拉德 J. 超声检测新技术 [M]. 北京: 科学出版社, 1991.

[9] 中国机械工程学会无损检测分会. 无损检测 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.

(上接第 1224 页)

#### 参考文献:

[1] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The nature element method in solid mechanics [J]. **Int J Num Meth Eng**, 1998, 43: 839– 887.

[2] Lasserre J B. An analytical expression and algorithm for the volume of a convex polyhedron in  $R^n$  [J]. **J of**

**Opt Theory and Appl**, 1983, 39: 363– 377.

[3] Braun J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids [J]. **Nature**, 1995, 376: 655– 660.

[4] Lasserre J B, Zeron E S. An laplace transform algorithm for the volume of a convex polytope [J]. **J ACM**, 2001, 48: 1126– 1140.