

文章编号: 1006-2467(2021)11-1483-10

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2020.215

基于滑动 Kriging 插值的 EFG-SBM 求解 含侧边界的稳态热传导问题

王 峰^{1,2}, 陈佳莉^{1,2}, 陈灯红³, 范 勇^{1,2}, 李志远⁴, 何卫平^{1,2}

(1. 三峡大学 水利与环境学院, 湖北 宜昌 443002; 2. 三峡大学 湖北省水电工程施工与
管理重点实验室, 湖北 宜昌 443002; 3. 三峡大学 土木与建筑学院, 湖北 宜昌 443002;
4. 大连理工大学 建设工程学部, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 采用基于滑动 Kriging 插值的无单元伽辽金比例边界法(EFG-SBM)求解侧边界有温度载荷的稳态热传导问题, 该方法通过无单元伽辽金法(EFG)和滑动 Kriging 插值离散环向边界. 由于滑动 Kriging 插值形函数具备 Kronecker delta 函数插值特性, 克服了移动最小二乘逼近难以直接准确施加本质边界条件的不足. 作为一种新型的边界型无网格法, EFG-SBM 兼有 EFG 法和比例边界有限元法(SBFEM)的优点. 该方法继承了 SBFEM 的半解析特性, 通过引入比例边界坐标系, 可将偏微分控制方程环向离散, 径向上解析求解. 与传统的 SBFEM 相比, 环向边界通过节点进行离散, 前处理和后处理简便. 通过数值算例可以看出, 相比基于拉格朗日多项式的 SBFEM, 基于滑动 Kriging 插值的 EFG-SBM 计算精度更高. 相比有限元法(FEM), 该方法能更好地反映尖角处热奇异性以及无限域温度分布状态.

关键词: 无单元伽辽金比例边界法; 滑动 Kriging 插值; 热传导; 比例边界有限元法

中图分类号: O 343.6 **文献标志码:** A

Element-Free Galerkin Scaled Boundary Method Based on Moving Kriging Interpolation for Steady Heat Conduction Analysis with Temperatures on Side-Faces

WANG Feng^{1,2}, CHEN Jiali^{1,2}, CHEN Denghong³, FAN Yong^{1,2},
LI Zhiyuan⁴, HE Weiping^{1,2}

(1. College of Hydraulic and Environmental Engineering, China Three Gorges University,
Yichang 443002, Hubei, China; 2. Hubei Key Laboratory of Construction and Management in
Hydropower Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, Hubei, China;
3. College of Civil Engineering and Architecture, China Three Gorges University,
Yichang 443002, Hubei, China; 4. Faculty of Infrastructure Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

Abstract: The element-free Galerkin scaled boundary method (EFG-SBM) based on moving Kriging (MK) interpolation is used to solve steady heat conduction problems with temperature loads on side-faces, in

收稿日期: 2020-07-08

基金项目: 国家自然科学基金(51809154), 湖北省教育厅科学技术研究项目(Q20181207), 湖北省高等学校优秀中青年科技创新团队计划(T2020005), 湖北省水电工程施工与管理重点实验室开放基金(2019KSD04)

作者简介: 王 峰(1987-), 男, 山东省莱阳市人, 副教授, 从事无网格法及比例边界有限元法研究.

通信作者: 陈灯红, 男, 副教授; E-mail: d.chen@ctgu.edu.cn.

which the circumferential boundary is discretized based on MK interpolation and the element-free Galerkin (EFG) method. As the shape functions constructed from the MK interpolation possess the Kronecker delta interpolation property, the MK shape functions overcome the shortcomings of moving least squares (MLS) approximation which is difficult to impose essential boundary conditions directly and accurately. As a new boundary-type meshless method, EFG-SBM has advantages of the EFG and scaled boundary finite element method (SBFEM). This method inherits the semi-analytical property of SBFEM by introducing the scaled boundary coordinate system, in which the governing differential equations are weakened in the circumferential direction and can be solved analytically in the radial direction. Unlike the traditional SBFEM, the preprocessing and postprocessing processes of EFG-SBM are simplified since only the nodal data structure is required in the circumferential direction. Numerical examples show that the EFG-SBM based on MK interpolation can obtain a higher accuracy than the SBFEM based on Lagrange polynomials. Compared with the finite element method (FEM), this method can better characterize the thermal singularity at the sharp corner and the temperature distribution of the infinite region.

Key words: element-free Galerkin scaled boundary method (EFG-SBM); moving Kriging (MK) interpolation; heat conduction; scaled boundary finite element method (SBFEM)

稳态传热是指系统各点温度仅随空间位置变化,不随时间发生改变^[1].在水利工程中,拱坝封拱温度计算下游以年平均气温、上游以年平均水温作为边界条件,此时求出的坝体温度场为稳定温度场.

目前求解稳态传热问题主要依靠数值计算方法,常见的有:有限体积法、有限元法、边界元法、无网格法^[2-6]等.其中有限元法是应用最为广泛的数值方法,然而该方法在求解热奇异性(热流奇异或温度奇异)问题时,裂纹附近需要加密网格^[7].此外,对于涉及无限域的稳态热传导问题,有限元法需要将无限域截断为一系列有限区域,并施加一定的人工边界条件^[8],这带来了计算时间的增加.

比例边界有限元法(Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM)是1997年由Song等^[9]基于坐标变换提出的一种半解析半数值的方法,能精确高效地求解热奇异性、无限域热传导问题^[10-11].该方法在计算域引入相似中心,建立含有径向和环向的比例边界坐标系.经过相似变换,物理变量转化为域边界点和相似中心所连径向坐标变化表示,偏微分控制方程转化为一阶常微分方程组.只需通过有限元法离散物理域边界,空间求解维数降低一维.该方法集成了有限元法和边界元法的优点,在环向可以获得有限元法精度解,相比边界元法,无需基本解.然而,比例边界有限元法的计算精度受环向离散网格影响,传统的拉格朗日多项式基函数可能导致相邻节点之间的低阶连续性.为此,Lobatto多项式^[12]、非均匀有理B样条^[13]已经被用于构造环向形函数,计算精度和效率明显提高.

为了避免网格影响,学者们提出了无网格法^[14-15],该方法非常适合求解涉及网格重构和畸变等问题.其中具有代表性的是无单元 Galerkin 法(Element-Free Galerkin Method, EFG)^[16]、无网格局部 Petrov-Galerkin (Meshless Local Petrov-Galerkin, MLPG)法^[17]、径向基点插值法(Radial Point Interpolation Method, RPIM)^[18].EFG法是借助于移动最小二乘(Moving Least Squares, MLS)法与 Galerkin 弱形式,构造近似场函数的一种离散方法.相比有限元法,计算精度和收敛速度明显提高,无需后处理便可获得光滑梯度场.将 EFG 法引入到比例边界坐标系环向边界,可获得新的边界型无网格法—无单元伽辽金比例边界法(Element-Free Galerkin Scaled Boundary Method, EFG-SBM)^[19].该方法只用节点离散环向边界,前处理简单.相比基于拉格朗日多项式的 SBFEM,该方法形函数更加光滑连续,具有更高的计算精度和更快的收敛速度.

然而,与 EFG 法类似,EFG-SBM 中的形函数通常是由移动最小二乘近似构造的,不具有 Kronecker delta 插值特性,不能直接施加本质边界条件,故形函数转化矩阵法^[19]被提出,该方法将虚节点值转换为实际节点值,方便了本质边界条件的施加.另外一种处理本质边界条件的方法是选取具有 Kronecker delta 插值特性的形函数,例如插值型移动最小二乘法^[20]、滑动 Kriging 插值^[21].滑动 Kriging 插值(Moving Kriging, MK)是基于变异函数理论和结构分析的线性无偏插值,直接通过节点进行插值,

建立的形函数具有 Kronecker delta 插值性质,能直接施加本质边界条件. 目前已被广泛应用于无网格法中,能显著提高计算效率^[22-26]. 由于 MK 插值模型参数取值直接影响计算精度,Zheng 等^[27]提出了模型相关参数与节点间距之间关系表达式.

本文将 MK 插值的 EFG-SBM 法扩展用于二维含侧边界的稳态传热问题求解,文中所有算例均无量纲. 环向边界用节点进行离散,通过 MK 插值来构造形函数,计算域边界依据端点分段为不同的光滑线段. 由于 MK 插值构建的形函数具有 Kronecker delta 插值性质,能直接施加本质边界条件.

1 MK 插值

在 EFG-SBM 中,为了不增加角点试函数的光滑性,MK 插值是沿着每条线段而不是整个域边界实现的. 设问题域边界 Γ 由 M 条光滑边组成, N 个离散节点 $s_i(i = 1, 2, \cdots, N)$ 分布在一条边上. 设点 s 插值域内有 n 个节点 $s_k(k = 1, 2, \cdots, n)$,则点 s 处温度近似函数 $T^h(s)$ 通过 MK 插值逼近为

$$T^h(s) = \sum_{k=1}^n \phi_k(s) T(s_k) = \Phi(s) T \quad (1)$$

式中:给定的 n 个节点处的温度值向量为 $T = [T(s_1) \ T(s_2) \ \cdots \ T(s_n)]^T$.

形函数 $\Phi(s) = [\phi_1(s) \ \phi_2(s) \ \cdots \ \phi_n(s)]$ 为

$$\Phi(s) = p^T(s) A + r^T(s) B \quad (2)$$

$p(s)$ 为 m 次完备的单项式基,即

$$p^T(s) = [p_1(s) \ p_2(s) \ \cdots \ p_m(s)] \quad (3)$$

对于线性基,

$$p^T(s) = [1 \ s], \quad m = 2 \quad (4)$$

对于二次基,

$$p^T(s) = [1 \ s \ s^2], \quad m = 3 \quad (5)$$

$$A = (P^T R^{-1} P)^{-1} P^T R^{-1} \quad (6)$$

$$B = R^{-1} (I - PA) \quad (7)$$

P 为节点处基函数值矩阵; R 为对角线为 1 的对称相关矩阵; I 为 n 阶单位矩阵.

$$P = \begin{bmatrix} p_1(s_1) & p_2(s_1) & \cdots & p_m(s_1) \\ p_1(s_2) & p_2(s_2) & \cdots & p_m(s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(s_n) & p_2(s_n) & \cdots & p_m(s_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & R(s_1, s_2) & \cdots & R(s_1, s_n) \\ R(s_2, s_1) & 1 & \cdots & R(s_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(s_n, s_1) & R(s_n, s_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

矢量 $r(s)$ 表达式为

$$r^T(s) = [R(s_1, s) \ R(s_2, s) \ \cdots \ R(s_n, s)] \quad (10)$$

$R(s_i, s_j)$ 为任意两节点 s_i 和 s_j 之间的对称相关矩阵,一般采用 Gaussian 型函数

$$R(s_i, s_j) = e^{-\theta r_{ij}^2} \quad (11)$$

式中: $\theta > 0$,为函数相关参数; $r_{ij} = \|s_i - s_j\|$.

考虑 $[0, 1]$ 内的一组离散节点 $(0, 0.25, 0.5, 0.75, 1)$,取线性基,当 θ 取不同值时, $s = 0.5$ 处所对应的形函数 ϕ 及形函数导数 $\phi_{,s}$ 分别如图 1 和 2 所示,其中 θ 取值范围为 $0.1 \sim 500$. 由图 1 和 2 可以看出,参数 θ 对形函数及形函数导数影响很大.

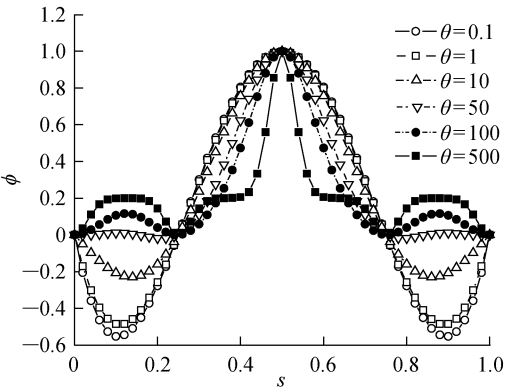


图 1 MK 形函数随参数 θ 的变化
Fig. 1 ϕ versus θ

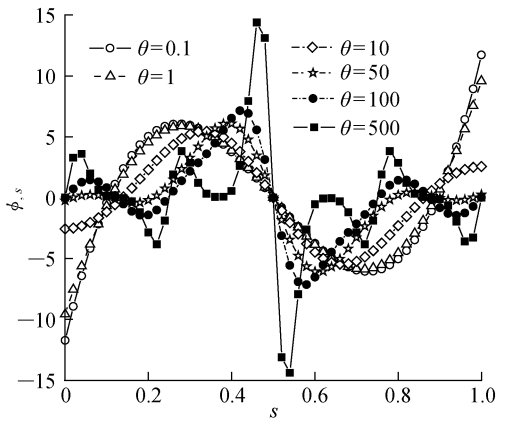


图 2 MK 形函数导数随参数 θ 变化
Fig. 2 $\phi_{,s}$ versus θ

一维空间 $[0, 1]$ 通过 6 个节点 $(0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$ 进行离散,图 3 所示为采用二次基时一维 MK 形函数,很明显,MK 形函数具有 Kronecker delta 插值性质,即

$$\phi_k(s_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & (k = j; k, j = 1, 2, \cdots, n) \\ 0 & (k \neq j; k, j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \quad (12)$$

同时也满足单位分解特性,即

$$\sum_{k=1}^n \phi_k(s) = 1 \quad (13)$$

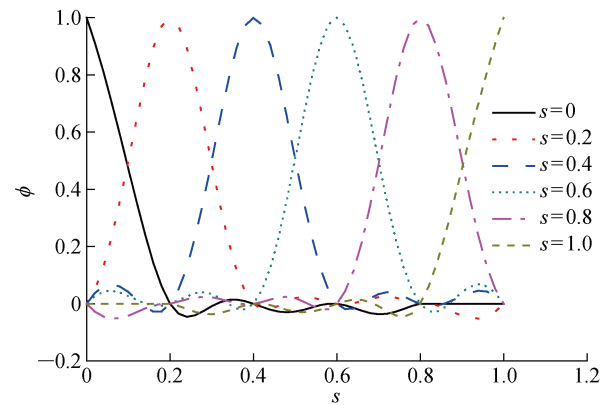


图 3 采用二次基时一维 MK 形函数

Fig. 3 One-dimensional MK shape functions with quadratic basis

$$\sum_{k=1}^n \phi_k(s) s_k = s \tag{14}$$

对于温度函数 $T(s)$ ，在曲线域进行插值，插值域半径 r_i 为

$$r_i = \beta ds \tag{15}$$

式中： β 为系数； ds 为点 s 附近节点距离。

2 侧边界含温度荷载的 EFG-SBM 方程

2.1 二维稳态热传导控制方程

设问题域边界 Γ 由温度边界 Γ_D 、热流密度边界 Γ_N 及对流换热边界 Γ_R 组成，当不考虑内热源，二维稳态热传导控制方程为

$$\nabla^2 T = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{16}$$

相应的边界条件为

$$T = \bar{T}, \quad \text{在 } \Gamma_D \text{ 上} \tag{17}$$

$$-\mathbf{n} \cdot k \nabla T = \bar{q}, \quad \text{在 } \Gamma_N \text{ 上} \tag{18}$$

$$\mathbf{n} \cdot k \nabla T = h(T_a - T), \quad \text{在 } \Gamma_R \text{ 上} \tag{19}$$

式中： Ω 为计算域； \bar{T} 和 \bar{q} 分别为给定的温度和热流密度； \mathbf{n} 为边界 Γ 的单位外法线向量； k 为热传导系数； h 为表面换热系数； T_a 为周围环境温度。简便起见，这里并没有考虑对流换热边界 Γ_R 作用。

2.2 侧边界施加温度荷载求解

如图 4 所示，引入相似中心为 (x_0, y_0) 的比例边界坐标系 $o\xi s$ 。 ξ 为径向坐标，从相似中心连至边界点，相似中心 ξ 值为 0，边界上 ξ 值为 1。 s 为环向坐标，表示沿着边界 Γ 从 s_0 开始逆时针旋转的弧长，终点为 s_1 。由式(16)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 \xi^2 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^1 + (\mathbf{E}^1)^T) \xi \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}^2 \mathbf{T}(\xi) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{20}$$

式中：

$$\mathbf{E}^0 = \int_S \mathbf{B}^1(s)^T \mathbf{B}^1(s) |\mathbf{J}| ds \tag{21}$$

$$\mathbf{E}^1 = \int_S \mathbf{B}^2(s)^T \mathbf{B}^1(s) |\mathbf{J}| ds \tag{22}$$

$$\mathbf{E}^2 = \int_S \mathbf{B}^2(s)^T \mathbf{B}^2(s) |\mathbf{J}| ds \tag{23}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}^1(s) &= \mathbf{b}^1(s) \boldsymbol{\Phi}(s) \\ \mathbf{B}^2(s) &= \mathbf{b}^2(s) \boldsymbol{\Phi}(s)_{,s} \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

$$\mathbf{b}^1(s) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_s(s)_{,s} \\ -x_s(s)_{,s} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\mathbf{b}^2(s) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} -(y_s(s) - y_0) \\ x_s(s) - x_0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

边界($\xi=1$)上 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_s(s) - x_0 & y_s(s) - y_0 \\ x_s(s)_{,s} & y_s(s)_{,s} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Jacobian 行列式为

$$|\mathbf{J}| = (x_s(s) - x_0) y_{s,s}(s) - (y_s(s) - y_0) x_{s,s}(s) \tag{28}$$

($x_s(s), y_s(s)$) 为边界 $\xi = 1$ 上点的笛卡尔坐标。

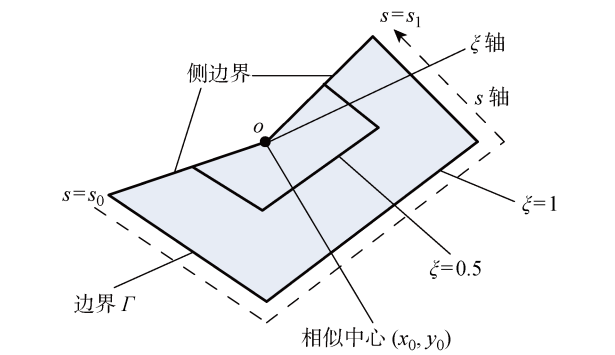


图 4 比例边界坐标系

Fig. 4 Scaled boundary coordinate system

相似中心和起点 s_0 、终点 s_1 的连线为侧边界，当侧边界 $s = s_0$ 或 $s = s_1$ 上温度不为 0 时，此时温度函数 $T(\xi)$ 分解为约束温度函数 $\bar{T}_s(\xi)$ (自由度数为 n_s) 和未约束温度函数 $T_u(\xi)$ (自由度数为 n_u)^[28-29]。此时比例边界方程(20)分解为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{uu}^0 & \mathbf{E}_{us}^0 \\ \mathbf{E}_{su}^0 & \mathbf{E}_{ss}^0 \end{bmatrix} \xi^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u(\xi) \\ \bar{\mathbf{T}}_s(\xi) \end{bmatrix}_{,\xi\xi} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{uu}^0 - \mathbf{E}_{uu}^1 + (\mathbf{E}_{uu}^1)^T & \mathbf{E}_{us}^0 - \mathbf{E}_{us}^1 + (\mathbf{E}_{us}^1)^T \\ \mathbf{E}_{su}^0 - \mathbf{E}_{su}^1 + (\mathbf{E}_{su}^1)^T & \mathbf{E}_{ss}^0 - \mathbf{E}_{ss}^1 + (\mathbf{E}_{ss}^1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u(\xi) \\ \bar{\mathbf{T}}_s(\xi) \end{bmatrix}_{,\xi} - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{uu}^2 & \mathbf{E}_{us}^2 \\ \mathbf{E}_{su}^2 & \mathbf{E}_{ss}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u(\xi) \\ \bar{\mathbf{T}}_s(\xi) \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{29}$$

式(29)的第一行方程可得

$$\begin{aligned} &E_{uu}^0 \xi^2 T_u(\xi)_{,\xi\xi} + (E_{uu}^0 - E_{uu}^1 + (E_{uu}^1)^T) \xi T_u(\xi)_{,\xi} - \\ &E_{uu}^2 T_u(\xi) = -E_{us}^0 \xi^2 \overline{T}_s(\xi)_{,\xi\xi} - (E_{us}^0 - E_{us}^1 + \\ &(E_{us}^1)^T) \xi \overline{T}_s(\xi)_{,\xi} + E_{us}^2 \overline{T}_s(\xi) \end{aligned} \tag{30}$$

假设 $\overline{T}_s(\xi)$ 可以展成幂级数的形式,即

$$\overline{T}_s(\xi) = \xi^{p_i} \overline{T}_{sp} \tag{31}$$

式(30)为非齐次常微分方程,该方程的通解是对应齐次线性方程的通解加非齐次线性方程的特解. 式(30)的特解也可以设置成幂级数的形式,即

$$T_u^*(\xi) = \xi^{p_i} T_{up}^* \tag{32}$$

代入式(30)可得

$$T_{up}^* = [p_i^2 E_{uu}^0 - p_i((E_{uu}^1)^T - E_{uu}^1) - E_{uu}^2]^{-1} [-p_i^2 E_{us}^0 + p_i((E_{us}^1)^T - E_{us}^1) + E_{us}^2] \overline{T}_{sp} \tag{33}$$

对于有限域,式(33)的解表示为

$$T(\xi) = \begin{bmatrix} T_u(\xi) \\ \overline{T}_s(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_u} \xi^{-\lambda_i} T_u c_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} + \xi^{p_i} \begin{bmatrix} T_{up}^* \\ \overline{T}_{sp} \end{bmatrix} \tag{34}$$

式中: λ_i 为特征值分解所得特征值; c_{1i} 为积分常数.

对于有限域,对偶变量 $q(\xi)$ 可以分为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_u(\xi) \\ q_s(\xi) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{uu}^0 & E_{us}^0 \\ (E_{us}^0)^T & E_{ss}^0 \end{bmatrix} \xi \begin{bmatrix} T_u(\xi) \\ \overline{T}_s(\xi) \end{bmatrix}_{,\xi} + \\ &\begin{bmatrix} (E_{uu}^1)^T & (E_{su}^1)^T \\ (E_{us}^1)^T & (E_{ss}^1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_u(\xi) \\ \overline{T}_s(\xi) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

在边界 $\xi=1$ 处,将式(34)代入式(35)可得

$$\begin{bmatrix} q_u(\xi) \\ q_s(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_u} c_{1i} \begin{bmatrix} q_{ui} \\ q_{si} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{up}^* \\ q_{sp}^* \end{bmatrix} \tag{36}$$

式中:

$$q_{ui} = ((E_{uu}^1)^T - \lambda_i E_{uu}^0) T_{up}^* \tag{37}$$
$$q_{si} = ((E_{us}^1)^T - \lambda_i (E_{us}^0)^T) T_{up}^* \tag{38}$$
$$q_{up}^* = ((E_{uu}^1)^T + p_i E_{uu}^0) T_{up}^* + ((E_{su}^1)^T + p_i E_{us}^0) \overline{T}_{sp} \tag{39}$$
$$q_{sp}^* = ((E_{us}^1)^T + p_i E_{us}^0) T_{up}^* + ((E_{ss}^1)^T + p_i E_{ss}^0) \overline{T}_{sp} \tag{40}$$

此时 $q_u(\xi)$ 的通解为

$$q_u(\xi) = \widetilde{\Phi}_{21} \xi^{-\tilde{\lambda}_0} c_1 + \xi^{p_i} q_{up}^* \tag{41}$$

在边界 $\xi=1$ 处,

$$T_u = \widetilde{\Phi}_{11} c_1 + T_{up}^* \tag{42}$$
$$q_u = \widetilde{\Phi}_{21} c_1 + q_{up}^* \tag{43}$$

其中, $\widetilde{\Phi}$ 和 $\tilde{\Lambda}_0$ 为“划行划列”处理后的系数矩阵所形成的 Hamiltonian 矩阵 \tilde{Z} 的特征系统.

由式(42)可得

$$c_1 = \widetilde{\Phi}_{11}^{-1} (T_u - T_{up}^*) \tag{44}$$

代入式(43)可得

$$q_u = \widetilde{\Phi}_{21} c_1 + q_{up}^* = \widetilde{\Phi}_{21} \widetilde{\Phi}_{11}^{-1} (T_u - T_{up}^*) + q_{up}^* \tag{45}$$

同样,对于无限域,可得

$$q_u = -\widetilde{\Phi}_{22} \widetilde{\Phi}_{12}^{-1} (T_u - T_{up}^*) - q_{up}^* \tag{46}$$

3 数值算例

3.1 矩形板稳态热传导问题

为了验证 EFG-SBM 求解侧边界含温度荷载的准确性,考虑如图 5 所示的矩形板^[30],图中: a 为矩形长度. 控制方程为

$$\nabla^2 T = 0 \tag{47}$$

该问题的温度解析解为

$$T(x,y) = \frac{100}{\sinh(0.6\pi)} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \tag{48}$$

由于问题对称,只选取矩形板左半部分进行计算. 计算过程中取 $a=10, \beta=4$, 相似中心选在左下角,如图 6 所示,此时左侧和底部是侧边界,无需通过节点进行离散. 图 7 所示为相对均方根误差随 θ 变化趋势图,可以看出, $\theta=0.05 \sim 0.12$ 可得到较理想的计算效果. 图 8 所示为 $\theta=0.1$ 时温度等值线分

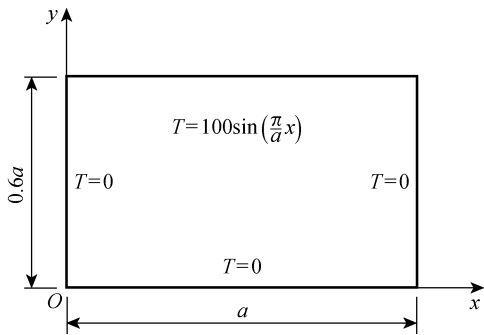


图 5 矩形板热传导边界条件

Fig. 5 Boundary conditions of heat conduction for rectangular plate

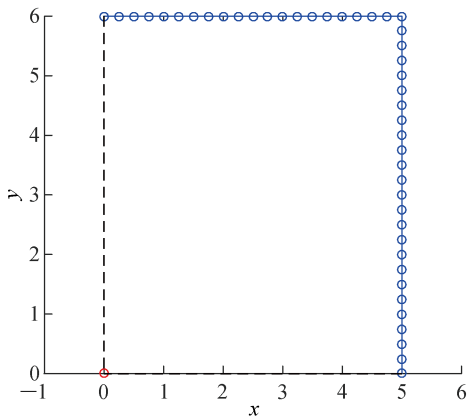


图 6 矩形板相似中心和节点分布

Fig. 6 Scaling center and nodes distribution for rectangular plate

布图,显然,温度等值线垂直于矩形板右侧边界,这跟矩形板右侧边界热流密度为 0 是相符的. 矩形板左侧和底部边界为 0,跟边界条件吻合.

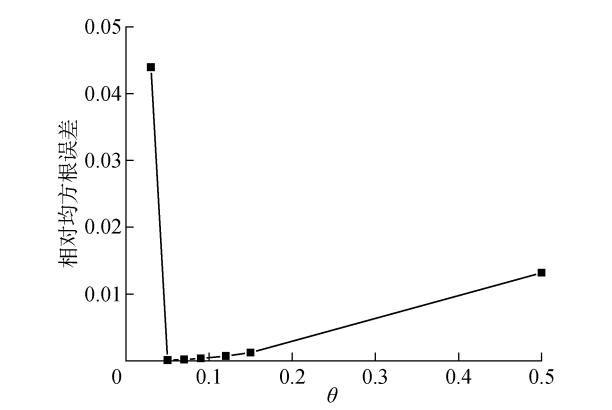


图 7 相对均方根误差随 θ 的变化
Fig. 7 Relative root mean square error versus θ

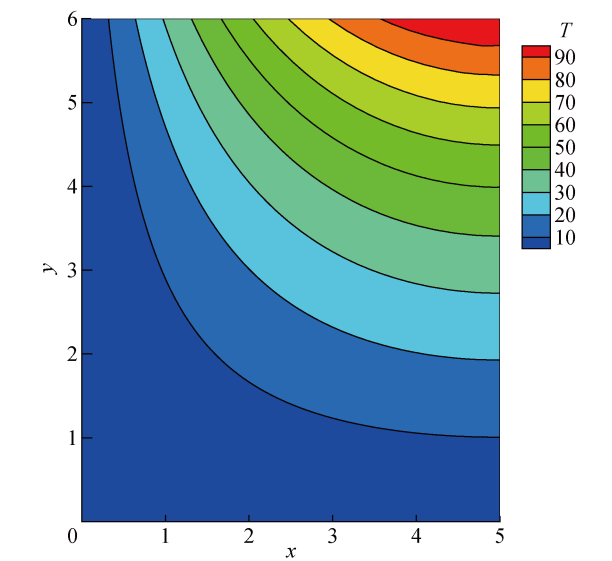


图 8 矩形板温度等值线图
Fig. 8 Temperature isothermal line of rectangular plate

为了研究本文方法计算精度,给出了 EFG-SBM 和 SBFEM 数值计算结果比较($\theta=0.1$),见表 1. 从表 1 可以看出,EFG-SBM 具有更高的计算精度,最大相对误差为 0.005%,误差比 SBFEM 误差低一个量级. 这是由于 MK 形函数高阶连续,插值域内可以共享更多节点信息. 由此可以看出 EFG-SBM 的优越性,继承了 SBFEM 和 EFG 法的优点,只用节点离散环向边界,然后通过 EFG 法进行求解,形函数高阶连续以及贡献更多节点信息保证了计算精度更高,径向解析可求得域内点温度值. 计算结果表明,EFG-SBM 求解含侧边界的稳态传热问题是可行的.

表 1 矩形板稳态热传导问题理论解与数值解比较
Tab. 1 Comparison of theoretical and numerical solutions for steady heat conduction problem of rectangular plate

计算点 (x,y)	理论解	SBFEM 解	EFG-SBM 解	SBFEM 误差/%	EFG-SBM 误差/%
(5,1)	9.927	9.971	9.927	0.45	0
(5,2)	20.841	20.823	20.842	0.09	0.005
(5,3)	33.830	33.804	33.830	0.08	0
(5,4)	50.184	50.155	50.185	0.06	0.002
(5,5)	71.533	71.509	71.533	0.03	0

3.2 L 型板稳态热传导问题

考虑如图 9 所示的 L 型板,其在尖角处具有热奇异性,左侧和底部绝热. EFG-SBM 的节点分布如图 10 所示,相似中心选在坐标原点处,黑虚线是侧边界,选用线性基. 为了比较计算结果,这里选用有限元方法,基于二维四节点拉格朗日矩形单元,共划分为 1 200 个单元. \bar{T} 考虑两种温度荷载形式:

$$\bar{T}_1 = 50 + 50\xi \tag{49}$$

$$\bar{T}_2 = 50 + 40\xi + 15\xi^2 - 5\xi^3 \tag{50}$$

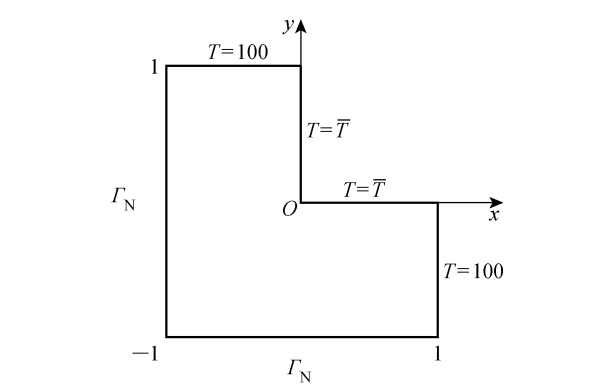


图 9 L 型区域热传导
Fig. 9 Heat conduction in L-shaped domain

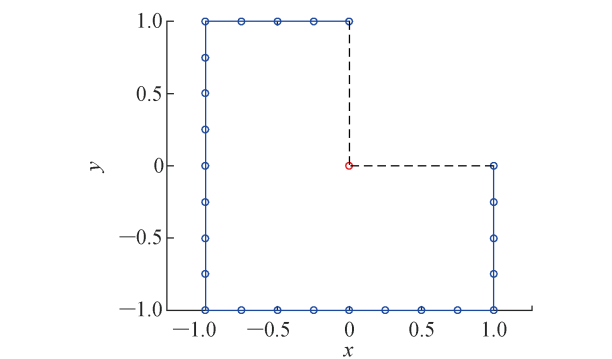


图 10 L 型板相似中心和节点分布
Fig. 10 Scaling center and nodes distribution for L-shaped plate

图 11 分别给出了 \overline{T}_1 温度荷载下 EFG-SBM 和有限元方法计算得到的 L 型板温度场分布图,很明显,温度结果在整个计算域吻合很好. 图 12 和 13

分别给出了 L 型板 V 型凹角温度和热流(q)分布图,可以看出,EFG-SBM 求解得到的温度和热流等值线更加光滑平顺,而有限元方法由于无法反映尖

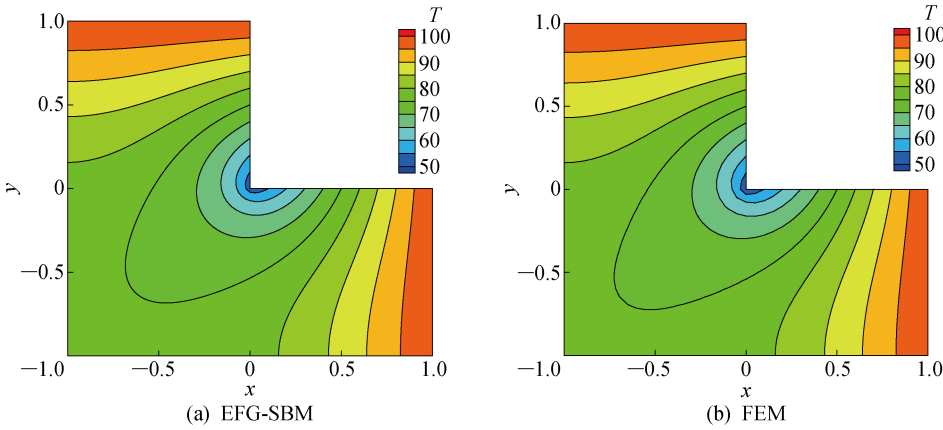


图 11 \overline{T}_1 温度荷载下 L 型板温度等值线图

Fig. 11 Temperature isothermal line of L-shaped plate at \overline{T}_1

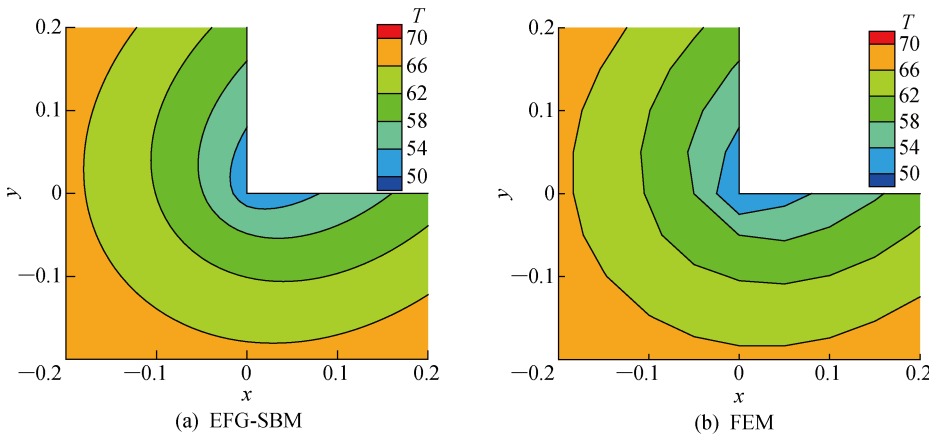


图 12 \overline{T}_1 温度荷载下 L 型板 V 型凹角温度等值线图

Fig. 12 Temperature isothermal line of L-shaped plate with V-shaped reentrant corner at \overline{T}_1

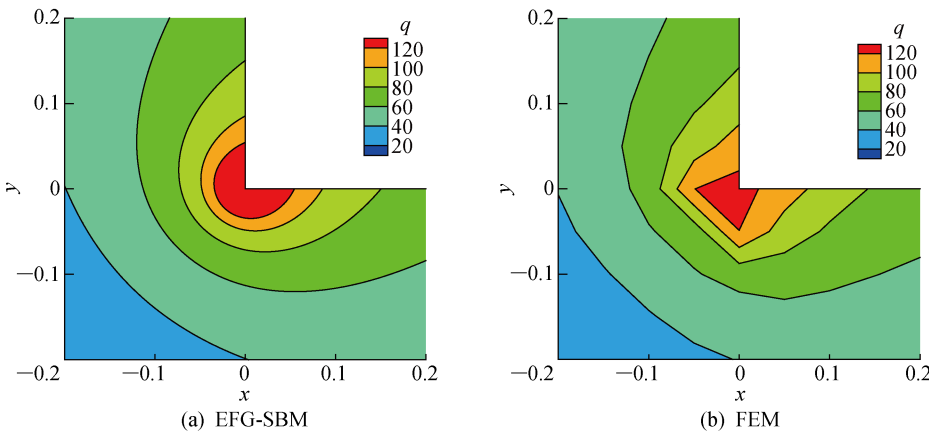


图 13 \overline{T}_1 温度荷载下 L 型板 V 型凹角热流等值线图

Fig. 13 Flux isothermal line of L-shaped plate with V-shaped reentrant corner at \overline{T}_1

角处的热奇异性,温度和热流等值线不光滑甚至出现折线,温度和热流等值线存在较大误差. 综合图 11~13,EFG-SBM 和有限元方法仅在 V 型凹角处存在细微差异,而 EFG-SBM 仅需通过节点离散模型边界,更加简便,计算更加高效.

图 14 所示为 \bar{T}_2 温度荷载下 EFG-SBM 求解得到的 L 型板温度场分布图,可以看出,从 \bar{T}_1 变化到 \bar{T}_2 ,温度变化趋势总体一致,温度荷载变大,影响到的区域范围越大,甚至能影响到 L 型板左侧和底部.

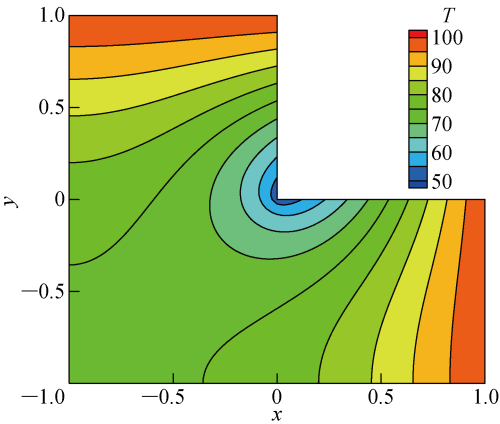


图 14 \bar{T}_2 温度荷载下 L 型板温度等值线图
Fig. 14 Temperature isothermal line of L-shaped plate at \bar{T}_2

3.3 半无限域稳态热传导问题

考虑如图 15 所示的半无限域,侧边界温度为 50,边界温度为

$$\bar{T} = 100 - 5\xi \tag{51}$$

EFG-SBM 的节点分布如图 16 所示,相似中心

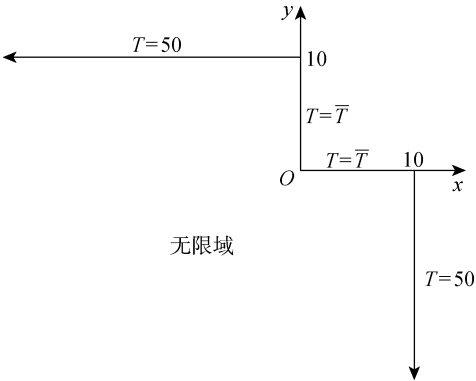


图 15 半无限域热传导
Fig. 15 Heat conduction in a semi-infinite domain

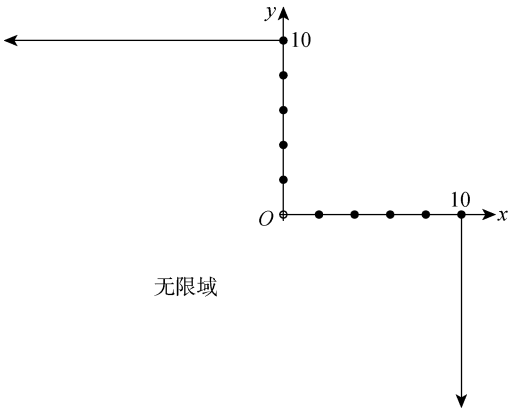


图 16 半无限域相似中心和节点分布
Fig. 16 Scaling center and nodes distribution for semi-infinite domain

选在坐标原点处,选用线性基. 为了对计算结果进行比较,这里选用有限元方法离散一边长为 20 的区域,基于二维四节点拉格朗日矩形单元,单位长度上布置 5 个单元,此时节点总数共计 7 701,共划分为 7 500 个单元. 图 17 所示为通过 EFG-SBM 和有限

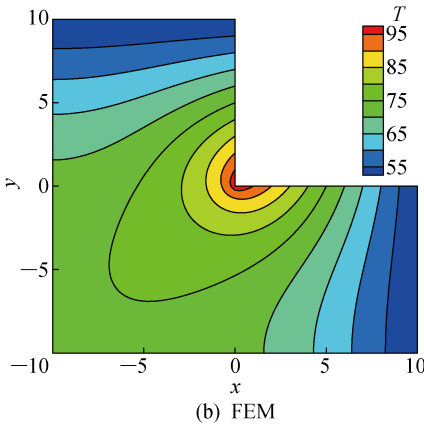
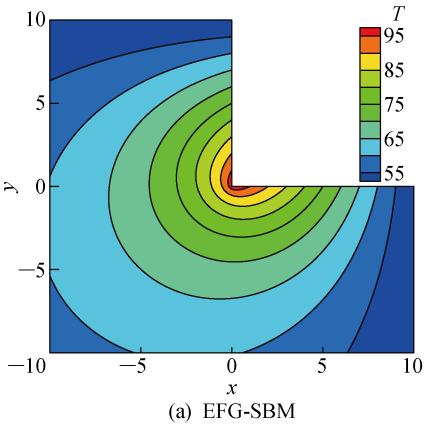


图 17 截断区域温度等值线图
Fig. 17 Temperature isothermal line of truncated domain

元方法计算得到的温度场分布图.很明显,有限元方法由于无法刻画无限域需截断边界,受截断区域影响,温度计算结果会产生不同.越接近截断边界,有限元结果跟 EFG-SBM 结果差别越大,EFG-SBM 计算得到的温度等值线更加光滑.

4 结论

(1) 传统移动最小二乘法形函数缺乏插值特性,将滑动 Kriging 插值法引入到 EFG-SBM 进行改进.由于滑动 Kriging 插值形函数具有 Kronecker delta 函数插值性质,在本质边界条件施加上无需其他处理.同时相比 SBFEM 中常用的拉格朗日多项式,滑动 Kriging 插值建立的形函数更加连续光滑.

(2) 将基于滑动 Kriging 插值的 EFG-SBM 用于求解二维含侧边界的稳态传热问题,计算域边界根据端点分段为不同光滑线段,每条线段通过滑动 Kriging 插值来构造弧长以及温度场函数.通过 3 个典型算例来说明 EFG-SBM 的特点,首先,在同等自由度离散情况下,相比 SBFEM,EFG-SBM 计算精度更高.其次,对于 V 型凹角结构,相比有限元法,EFG-SBM 能更好地反映尖角处热奇异性(温度或热流奇异).最后,通过对半无限域稳态传热问题进行求解,有限元法截断边界对温度分布状态具有较大影响,实际问题求解应予以重视,而 EFG-SBM 可以很方便地刻画无限域.

参考文献:

- [1] 杨世铭,陶文铨. 传热学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
YANG Shiming, TAO Wenquan. Heat transfer[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [2] RAITHBY G D, CHUI E H. A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media[J]. **Journal of Heat Transfer**, 1990, 112(2): 415-423.
- [3] KANJANAKIKASEM W. A finite element method for prediction of unknown boundary conditions in two-dimensional steady-state heat conduction problems[J]. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 2015, 88: 891-901.
- [4] 徐刚,陈静,王树齐,等. 无奇异边界元法精度分析[J]. 上海交通大学学报,2018, 52(7): 867-872.
XU Gang, CHEN Jing, WANG Shuqi, *et al.* The numerical accuracy of the desingularized boundary integral equation method[J]. **Journal of Shanghai Jiao Tong University**, 2018, 52(7): 867-872.
- [5] 秦红星,杨杰. 基于无网格局部彼得罗夫伽辽金方法

的点采样曲面滤波[J]. 上海交通大学学报,2012, 46(4): 584-590.

QIN Hongxing, YANG Jie. Point-based surface filtering based on meshless local Petrov-Galerkin method [J]. **Journal of Shanghai Jiao Tong University**, 2012, 46(4): 584-590.

- [6] 王峰,郑保敬,林皋,等. 热弹性动力学耦合问题的插值型移动最小二乘无网格法研究[J]. 工程力学,2019, 36(4): 37-43.

WANG Feng, ZHENG Baojing, LIN Gao, *et al.* Meshless method based on interpolating moving least square shape functions for dynamic coupled thermoelasticity analysis [J]. **Engineering Mechanics**, 2019, 36(4): 37-43.

- [7] CHEN W H, TING K. Finite element analysis of transient thermoelastic fracture problems[J]. **Computational Mechanics**, 1986, 86: 1063-1069.

- [8] DE HAN H, HUANG Z Y. Exact and approximating boundary conditions for the parabolic problems on unbounded domains[J]. **Computers & Mathematics With Applications**, 2002, 44(5/6): 655-666.

- [9] SONG C M, WOLF J P. The scaled boundary finite-element method-alias consistent infinitesimal finite-element cell method-for elastodynamics[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1997, 147(3/4): 329-355.

- [10] 徐斌,徐满清,王建华. 饱和土体固结 3D 比例边界有限元法分析[J]. 上海交通大学学报,2016, 50(1): 8-16.

XU Bin, XU Manqing, WANG Jianhua. Modelling of saturated soil dynamic coupled consolidation problems using three-dimensional scaled boundary finite element method[J]. **Journal of Shanghai Jiao Tong University**, 2016, 50(1): 8-16.

- [11] BIRK C, SONG C. A continued-fraction approach for transient diffusion in unbounded medium[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2009, 198(33/34/35/36): 2576-2590.

- [12] VU T H, DEEKS A J. Use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2006, 65(10): 1714-1733.

- [13] 庞林,林皋,钟红. 比例边界等几何方法在断裂力学中的应用[J]. 工程力学,2016, 33(7): 7-14.

PANG Lin, LIN Gao, ZHONG Hong. Scaled boundary isogeometric analysis applied to fracture mechanics problem[J]. **Engineering Mechanics**, 2016, 33(7): 7-14.

- [14] LIU G R, GU Y T. An introduction to meshfree

- methods and their programming[M]. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [15] 马文涛, 许艳, 马海龙. 修正的内部基扩充无网格法求解多裂纹应力强度因子[J]. *工程力学*, 2015, 32(10): 18-24.
- MA Wentao, XU Yan, MA Hailong. Solving stress intensity factors of multiple cracks by using a modified intrinsic basis enriched meshless method[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(10): 18-24.
- [16] BELYTCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229-256.
- [17] 吴学红, 李增耀, 申胜平, 等. 不规则区域热传导问题无网格 Petrov-Galerkin 方法的数值模拟[J]. *工程热物理学报*, 2009, 30(8): 1350-1352.
- WU Xuehong, LI Zengyao, SHEN Shengping, *et al.* Numerical simulation of heat conduction problems on irregular domain by using MLPG method[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2009, 30(8): 1350-1352.
- [18] LI Y, LIU G R. An element-free smoothed radial point interpolation method (EFS-RPIM) for 2D and 3D solid mechanics problems[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2019, 77(2): 441-465.
- [19] HE Y Q, YANG H T, DEEKS A J. An element-free Galerkin scaled boundary method for steady-state heat transfer problems[J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2013, 64(3): 199-217.
- [20] LI Q H, CHEN S S, LUO X M. Steady heat conduction analyses using an interpolating element-free Galerkin scaled boundary method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 300: 103-115.
- [21] 王峰, 周宜红, 林皋, 等. 二维稳态热传导问题改进的 EFG-SBM 法[J]. *工程热物理学报*, 2017, 38(6): 1288-1299.
- WANG Feng, ZHOU Yihong, LIN Gao, *et al.* Improved element-free Galerkin scaled boundary method for two-dimensional steady heat transfer problems[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2017, 38(6): 1288-1299.
- [22] GU L. Moving Kriging interpolation and element-free Galerkin method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56(1): 1-11.
- [23] DAI B D, ZHENG B J, LIANG Q X, *et al.* Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov-Galerkin method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(19): 10044-10052.
- [24] CHEN S S, LI Q H, LIU Y H. A scaled boundary node method applied to two-dimensional crack problems[J]. *Chinese Physics B*, 2012, 21(11): 110207.
- [25] 王峰. 改进的无网格法求解温度场和温度应力及其在水工结构分析中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2015.
- WANG Feng. Improved meshless method for the solution of temperature field and thermal stress and its application to hydraulic structure analysis [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2015.
- [26] 王峰, 林皋, 李洋波, 等. 非均质材料热传导问题的扩展无单元伽辽金法[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2019, 47(12): 116-120.
- WANG Feng, LIN Gao, LI Yangbo, *et al.* Extended element-free Galerkin method for steady heat conduction problem of inhomogenous material[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2019, 47(12): 116-120.
- [27] ZHENG B J, DAI B D. A meshless local moving Kriging method for two-dimensional solids[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(2): 563-573.
- [28] DEEKS A J. Prescribed side-face displacements in the scaled boundary finite-element method[J]. *Computers & Structures*, 2004, 82(15/16): 1153-1165.
- [29] 李鹏. 热流和渗流问题的等几何比例边界有限元方法及其在大坝工程中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2018.
- LI Peng. Isogeometric scaled boundary finite element method in heat transfer and seepage flow problems and the application to dams[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.
- [30] LI F Z, REN P H. A novel solution for heat conduction problems by extending scaled boundary finite element method[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, 95: 678-688.

(本文编辑:陈晓燕)