

文章编号:1006-2467(2021)07-0858-10

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2019.221

# 多元退化系统维修与备件订购策略优化模型

杨志远<sup>1</sup>, 赵建民<sup>1</sup>, 程中华<sup>1</sup>, 郭驰名<sup>1</sup>, 李俐莹<sup>2</sup>

(1. 陆军工程大学石家庄校区 装备指挥与管理系, 石家庄 050003;

2. 河北科技大学 信息科学与工程学院, 石家庄 050000)

**摘 要:** 针对具有多个相关退化过程系统的状态维修及备件订购决策问题, 在连续监测条件下, 建立系统维修与备件订购决策优化模型. 首先, 采用 Gamma 过程和 Copula 函数建立系统多元退化模型, 然后提出基于控制限策略的系统维修与备件订购策略. 在此基础上, 考虑系统退化量对维修费用的影响, 获得系统长期运行条件下的期望维修费用率解析表达式. 同时为简化模型计算, 提出系统期望维修费用率近似表达式. 利用人工蜂群算法在费用准则下获得系统最优预防性更换阈值和备件订购阈值. 案例分析结果说明了在维修决策中考虑退化相关的必要性. 与已有策略相比, 综合优化预防性更换和备件订购阈值能够有效降低系统维修费用.

**关键词:** 维修决策; 备件订购; 多元退化过程; 退化相关性; 状态监测

中图分类号: TB 114

文献标志码: A

## Optimization Model of Maintenance and Spare Parts Ordering Policy in Multivariate Degradation System

YANG Zhiyuan<sup>1</sup>, ZHAO Jianmin<sup>1</sup>, CHENG Zhonghua<sup>1</sup>, GUO Chiming<sup>1</sup>, LI Liying<sup>2</sup>

(1. Department of Equipment Command and Management, Shijiazhuang Campus of Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China; 2. School of Information Science and Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050000, China)

**Abstract:** Aimed at the decision-making problem of condition-based maintenance and spare parts ordering for systems with multiple dependent degradation processes, an optimization model of system maintenance and spare parts ordering policy is developed under the condition of continuously monitoring. First, the Gamma process and Copula function are used to develop the system multivariate degradation model. Then, the system maintenance and spare parts ordering policy based on the control limit strategy is proposed. Considering the influence of system degradation on maintenance cost, the analytical expression of the expected maintenance cost rate under long-term operation conditions is obtained. At the same time, an approximate expression of the expected maintenance cost rate is proposed to simplify the model calculation. The optimal preventive replacement threshold and spare parts ordering threshold of the system are obtained by using the artificial bee colony algorithm under the cost criterion. The case analysis shows that it is necessary to consider degradation in maintenance decision-making. Compared with the existing policy, the comprehensive optimization of preventive replacement and spare parts ordering thresholds can

收稿日期: 2019-07-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71871220, 71871219)

作者简介: 杨志远(1990-), 男, 河北省石家庄市人, 博士生, 主要研究方向为装备维修保障理论与技术.

通信作者: 程中华, 男, 教授, 博士生导师, 电话(Tel.): 0311-87994566; E-mail: 13143648622@163.com.

effectively reduce the maintenance cost of the system.

**Key words:** maintenance decision; spare parts ordering; multivariate degradation process; dependent degradation; condition monitoring

现代复杂系统通常装备有状态监测单元如传感器、仪表、计算设备<sup>[1]</sup>,这为基于状态的维修(CBM)实施提供了系统状态数据.相对于基于时间的维修方式,CBM能够有效控制“维修不足”和“维修过度”的问题<sup>[2]</sup>.通常来说,获取系统状态信息的方式可分为定期检测和连续监测两类,相比于定期检测,连续监测能够实时获取系统状态信息,从而更为及时有效地进行CBM决策,降低系统故障风险和维修费用.随着传感器技术的发展,连续监测的应用场景越来越多,特别是对于一些关键部件或系统,如发电机组,其本身价值高、停机损失大,对系统状态进行连续监测更为适用.同时,复杂系统通常存在多个退化过程,且由于共同的运行环境、应力等因素,退化过程间往往是相关的,在CBM决策中需要充分考虑这些因素<sup>[3]</sup>,这也增加了多元退化系统CBM决策的难度.

对于有多个相关退化过程的系统而言,CBM决策的基础是对不同退化过程间的相关性进行建模描述.目前,常用的方法包括多维退化模型<sup>[4-5]</sup>、退化率相关模型<sup>[6-7]</sup>和基于Copula函数的退化相关模型<sup>[8-9]</sup>.文献[4-5]分别采用多元正态分布和二元Birnbaum-Saunders(B-S)分布来描述不同退化过程间的相关关系,而分布形式也限制了此类方法的应用.文献[6-7]将不同退化过程间的相关关系表示为一个部件退化水平对其余部件退化速率的影响.在工程实际中,这种影响关系及程度很难采用定量方法描述和确定.相对而言,Copula函数在定量描述随机变量相关性方面具有很高的灵活性,并且提供了分析相关结构对系统可靠性影响的参数化方法.基于不同种类的Copula相关结构,文献[10]利用仿真方法对定期检测策略下的系统维修费用进行分析,其中预防性维修阈值为固定值.文献[11]建立了多部件系统检测维修策略优化模型,其中部件故障间的相关性采用Gaussian Copula函数来描述.文献[12]采用Levy Copula函数描述系统二元退化间的相关关系,并在此基础上提出系统定期检测与机会维修策略,利用仿真方法获得了最优预防性维修阈值和机会维修概率阈值.在现有的基于Copula函数建立多元退化模型的文献中,很少研究在连续监测条件下的CBM决策优化问题,且没有考虑系

统备件约束,而对一些价值较高的重要系统而言,很难保证时刻有可用备件,通常需要提前预定.在连续监测条件下,文献[13]研究了单一退化过程的预防性更换阈值优化问题.在此基础上,文献[14]考虑二元相关Levy退化过程,以系统长期运行条件下的期望维修费用率和可用度为准则,计算获得在不同系统结构下的最优预防性更换阈值.上述研究均是在维修延迟(维修资源的到达需要一定时间,此处的维修资源也可指备件)条件下,对预防性更换阈值进行决策,没有综合考虑备件订购阈值以及预防性维修阈值的优化问题.

针对上述问题,本文考虑系统不同退化过程间具有的相关性,利用Copula函数建立系统多元退化模型.在此基础上,提出系统维修及备件订购策略,分析直接维修费用、备件库存费用和故障停机损失,建立系统维修费用模型,以系统期望维修费用率准则,引入人工蜂群(ABC)算法搜索最优维修及备件订购策略,从而提高维修工作的经济性,为科学制定系统维修及备件订购计划提供方法支撑.

## 1 系统描述

系统性能会随着工作时间的增加不断退化,当退化超过阈值时会导致系统出现故障.假设系统存在 $n$ 个相关性能退化过程,任意退化过程超过特定阈值时系统即会出现故障.

现有的退化过程模型主要包括退化轨迹模型、退化量分布模型和基于随机过程的退化模型等.相对于前两种模型,基于随机过程的退化模型能够描述性能退化在时间轴上的不确定性,更符合工程实际.在基于随机过程的退化模型中,Gamma过程由于其良好的性质,广泛应用于连续非减的退化过程建模,包括材料的磨损、侵蚀、裂纹、老化等.本文采用Gamma过程来建立系统退化过程模型.

令 $X_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ 表示系统第 $i$ 个性能退化过程,根据Gamma过程平稳独立增量性质可知,对于任意 $t > u > 0, X_i(t) - X_i(u) = X_i(t - u) \sim \Gamma(\alpha_i(t - u), \beta_i)$ ,其中: $\Gamma(\cdot, \cdot)$ 为Gamma分布; $\alpha_i > 0$ 和 $\beta_i > 0$ 分别为形状参数和尺度参数.假设系统初始退化量均为0,那么 $X_i(t)$ 的概率密度函数和概率密度分布函数可表示为

$$\left. \begin{aligned} f_{X_i(t)}(x | \alpha_i, \beta_i) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_i t) \beta_i^{\alpha_i t}} x^{\alpha_i t - 1} e^{-\frac{x}{\beta_i}} I_{\{x \geq 0\}} \\ F_{X_i(t)}(x | \alpha_i, \beta_i) &= \int_0^x f_{X_i(t)}(s | \alpha_i, \beta_i) ds = \\ &1 - \frac{\Gamma(\alpha_i t, \frac{x}{\beta_i})}{\Gamma(\alpha_i t)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-r} dr$  为 Gamma 函数;  
 $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty r^{\alpha-1} e^{-r} dr$  为不完全 Gamma 函数;  $I_{\{x \geq 0\}}$   
 为示性函数. 系统第  $i$  个退化过程的均值为  $\alpha_i \beta_i t$ , 方差为  $\alpha_i \beta_i^2 t$ .

如上所述, 本文采用 Copula 函数描述退化过程的相关性. 为便于实际应用, 这里假设: 在不同时间间隔内, 不同退化过程的退化过程增量间的相关性可忽略. 在文献[8]中也采用了类似的假设分析多元 Wiener 退化过程的相关性. 令  $t > u > 0$ , 根据 Sklar 定理, 系统  $n$  个退化过程在时间区间  $[u, t]$  上退化增量  $X_i(t-u)$  的联合概率分布函数可表示为

$$H_{t-u}(\mathbf{x}) = C(F_{X_1(t-u)}(x_1), F_{X_2(t-u)}(x_2), \dots, F_{X_n(t-u)}(x_n); \boldsymbol{\theta}) \quad (2)$$

其对应的概率密度函数可表示为

$$\begin{aligned} h_{t-u}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial H_{t-u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \\ &c(F_{X_1(t-u)}(x_1), F_{X_2(t-u)}(x_2), \dots, \\ &F_{X_n(t-u)}(x_n); \boldsymbol{\theta}) \times \prod_{i=1}^n f_{X_i(t-u)}(x_i) \quad (3) \\ &c(F_{X_1(t-u)}(x_1), F_{X_2(t-u)}(x_2), \dots, F_{X_n(t-u)}(x_n); \boldsymbol{\theta}) = \\ &\frac{\partial C(F_{X_1(t-u)}(x_1), F_{X_2(t-u)}(x_2), \dots, F_{X_n(t-u)}(x_n); \boldsymbol{\theta})}{\partial F_{X_1(t-u)}(x_1) \partial F_{X_2(t-u)}(x_2) \dots \partial F_{X_n(t-u)}(x_n)} \quad (4) \end{aligned}$$

式中:  $C$  为 Copula 函数;  $c$  为 Copula 密度函数;  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ,  $x_i \geq 0$ ;  $F_{X_i(t-u)}(x_i)$  为第  $i$  个退化过程在  $[u, t]$  内增量的分布函数;  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_m]$  为 Copula 函数中的参数向量, 其取值直接影响着随机变量间相关关系强弱. 对于 Copula 函数参数估计问题, 可基于退化数据通过最大似然估计或边际推断(IFM)法分两步获得. 在此基础上, 可采用赤池信息准则(AIC)选择合适的 Copula 函数描述系统退化相关性. 关于 Copula 函数的参数估计方法参考文献[15].

在此基础上, 假设系统退化故障阈值向量为  $\mathbf{Q}_L = [Q_{L_1} \ Q_{L_2} \ \dots \ Q_{L_n}]$ , 可获得系统可靠度函数为

$$R_{\text{sys}}(t) = P(X_1(t) \leq Q_{L_1}, X_2(t) \leq Q_{L_2}, \dots, X_n(t) \leq Q_{L_n}) = H_t(\mathbf{Q}_L) = C(F_{X_1(t)}(Q_{L_1}),$$

$$F_{X_2(t)}(Q_{L_2}), \dots, F_{X_n(t)}(Q_{L_n}); \boldsymbol{\theta}) \quad (5)$$

式中:  $P$  为概率.

由于 Gamma 函数和不完全 Gamma 函数的影响,  $F_{X_i(t)}(Q_{L_i})$  的计算较为复杂, 可采用 B-S 分布对其进行近似计算<sup>[16]</sup>.  $F_{X_i(t)}(Q_{L_i})$  可近似表示为

$$F_{X_i(t)}(Q_{L_i}) \approx 1 - F_{\text{BS}}(t; Q_{L_i}) = \Phi \left[ \frac{1}{\gamma_i} \left( \sqrt{\frac{\lambda_i}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\lambda_i}} \right) \right] \quad (6)$$

式中:  $F_{\text{BS}}(t; Q_{L_i})$  为 B-S 分布函数;  $\gamma_i = \sqrt{\beta_i / Q_{L_i}}$ ;  $\lambda_i = Q_{L_i} / \alpha_i \beta_i$ ;  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布.

令  $U_i(t) = \frac{1}{\gamma_i} \left( \sqrt{\frac{\lambda_i}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\lambda_i}} \right)$ , 由此, 系统可靠

度函数可近似表示为

$$R_{\text{sys}}(t) = C(F_{X_1(t)}(Q_{L_1}), F_{X_2(t)}(Q_{L_2}), \dots, F_{X_n(t)}(Q_{L_n}); \boldsymbol{\theta}) \approx C(\Phi(U_1(t)), \Phi(U_2(t)), \dots, \Phi(U_n(t)); \boldsymbol{\theta}) \quad (7)$$

## 2 系统维修与备件订购策略

本文的系统维修和备件订购采用控制限策略(CLP), 即根据系统退化状态确定相应的备件订购和维修活动. 备件订购阈值为  $\mathbf{Q}_A = [Q_{A_1} \ Q_{A_2} \ \dots \ Q_{A_n}]$ , 预防性更换阈值为  $\mathbf{Q}_M = [Q_{M_1} \ Q_{M_2} \ \dots \ Q_{M_n}]$ . 为建立系统维修与备件订购决策优化模型, 对相关策略做出如下假设.

(1) 对系统在运行过程中的退化状态进行连续监测, 系统各性能退化指标水平可以通过连续监测得到; 单位时间状态监测费用记为  $C_1$ .

(2) 初始备件库存为 0, 当系统任意退化过程达到备件订购阈值时, 系统发出订货信号, 备件经过时间  $\tau$  后到达. 此时, 若系统不进行更换, 会产生相应的备件库存费用; 备件订购费用记为  $C_0$ , 单位时间库存费用记为  $C_S$ .

(3) 当系统任意退化过程达到预防性更换阈值后, 系统发出维修信号, 如果此时库存中有备件, 直接对系统进行更换; 否则, 在备件到达后对系统进行更换. 更换后, 系统修复如新, 且之后系统退化过程与更换前的系统无关. 如果备件是在系统故障后到达, 即会产生停机损失, 系统单位时间内的停机损失记为  $C_{L0}$ . 一般来说, 系统维修更换费用与其退化量相关, 退化量高的系统通常所需维修费用也较多. 系统退化量是由多个退化过程共同决定的, 由于各退化过程的故障阈值和量纲可能会不同, 进而将影响系统退化量的计算. 因此, 首先定义各退化过程的相对退化量为

$$\chi_i(t) = \frac{X_i(t)}{Q_{L_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

由式(8)可以看出,当任意  $\chi_i(t) \geq 1$  时,系统处于故障状态。多退化过程引发的系统故障为竞争失效过程,系统状态由多退化过程中的最大相对退化量决定。基于此,系统在  $t$  时刻的维修更换费用可表示为

$$C_{\text{MAN}} = C_R + \rho E_{\text{sup}}(\chi_t) \quad (9)$$

式中:  $E_{\text{sup}}(\chi_t) = \max\{E(\chi_1(t)), E(\chi_2(t)), \dots, E(\chi_n(t))\}$ ,  $E(\chi_i(t))$  为  $\chi_i(t)$  的期望;  $C_R$  为系统更换固定费用;  $\rho$  为更换费用随系统退化量变化系数。

(4) 维修时间相对于系统寿命周期来说非常短,在建模过程中忽略不计。

(5) 为使备件订购阈值和系统预防性更换阈值有意义,令  $Q_{A_i} \leq Q_{M_i} \leq Q_{L_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

以单退化过程为例,系统退化过程和更新过程如图1所示。其中:  $t_A$ 、 $t_M$  和  $t_L$  分别为退化过程到达备件订购阈值、预防性更换阈值及故障阈值的时间,且  $t_L \geq t_M \geq t_A > 0$ 。

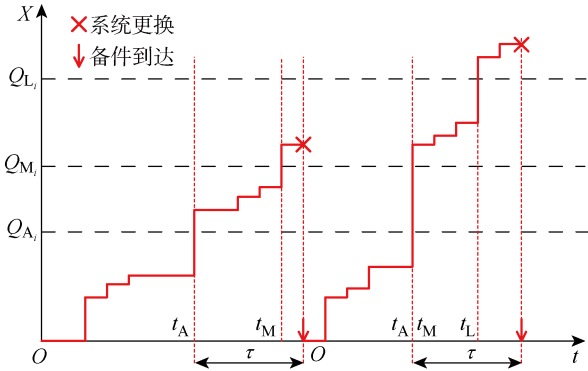


图1 系统退化和更新过程

Fig. 1 System degradation and renewal process

对于 Gamma 过程而言,其退化路径为跳跃过程,因此有  $P(t_M - t_A = 0) > 0$ ,  $P(t_L - t_A = 0) > 0$ , 如图1中系统第2个更新周期内的退化过程所示。事实上,对于很多左极右连的 Levy 过程(包含 Gamma 过程)来说,均存在上述性质。

系统不同维修时机如图2所示。根据备件到达的时间不同,系统维修情况可划分为以下3种:

- (1) 当  $t_A + \tau < t_M$  时,在系统退化状态到达预防性更换阈值时对系统进行更换;
- (2) 当  $t_M \leq t_A + \tau < t_L$  时,在备件到达时对系统进行预防性更换;
- (3) 当  $t_A + \tau \geq t_L$  时,在备件到达时对系统进行故障更换。

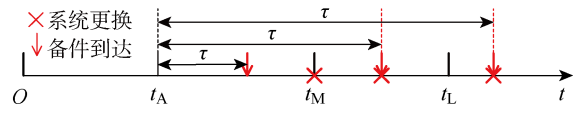


图2 系统的不同维修时机

Fig. 2 Different maintenance opportunities of the system

### 3 费用模型

本文以系统长期运行情况下单位时间平均费用(即期望费用率)为指标,对系统预防性维修和备件订购策略进行评价。由前文分析可以看出,备件订购阈值和预防性更换阈值的高低会影响不同维修方式发生概率、维修费用、库存费用、更新周期长度,从而影响系统期望维修费用率。

#### 3.1 期望维修费用率计算

考虑上述3种不同的系统维修情况,在不同情况下系统在一个更新周期内的维修费用  $C(T)$  及其相应的更新周期长度  $T$  可表示为

(1) 当  $t_A + \tau < t_M$  时,

$$\left. \begin{aligned} C(T) &= C_S(t_M - t_A - \tau) + C_1(t_M) + \\ &\quad C_R + \rho E_{\text{sup}}(\chi_{t_M}) + C_O \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$T = t_M$$

(2) 当  $t_M \leq t_A + \tau < t_L$  时,

$$\left. \begin{aligned} C(T) &= C_R + \rho E_{\text{sup}}(\chi_{t_A + \tau}) + \\ &\quad C_1(t_A + \tau) + C_O \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$T = t_A + \tau$$

(3) 当  $t_A + \tau \geq t_L$  时,

$$\left. \begin{aligned} C(T) &= C_{LO}(t_A + \tau - t_L) + C_1(t_A + \tau) + \\ &\quad C_R + \rho E_{\text{sup}}(\chi_{t_A + \tau}) + C_O \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$T = t_A + \tau$$

在此基础上,根据更新报酬原理可得系统的期望维修费用率为

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} &= [C_S E(\max\{t_M - t_A, \tau\}) - \\ &\quad C_{LO} E(\min\{t_L - t_A, \tau\}) + (C_{LO} - C_S)\tau + \\ &\quad \rho(E_{\text{sup}}(\chi_{t_A + \tau}) - E_{\text{sup}}(\chi_{t_M}))P(t_M - t_A \leq \tau) + \\ &\quad \rho E_{\text{sup}}(\chi_{t_M}) + C_R + C_O] / \\ &\quad [E(\max\{t_M - t_A, \tau\}) + E(t_A)] + C_1 \end{aligned} \quad (13)$$

#### 3.2 具体表达式推导

为获得系统期望维修费用率的解析式,假设  $G_M(u)$  和  $G_L(u)$  分别为  $t_M - t_A$  和  $t_L - t_A$  的分布函数,相应的生存函数  $\bar{G}_M(u) = 1 - G_M(u)$ ,  $\bar{G}_L(u) = 1 - G_L(u)$ , 可得:

$$E(\max\{t_M - t_A, \tau\}) = \tau G_M(\tau) + \int_{\tau}^{+\infty} s dG_M(s) =$$

$$\begin{aligned}
& \tau G_M(\tau) + \int_{\tau}^{+\infty} \int_0^s du dG_M(s) = \\
& \tau G_M(\tau) + \int_0^{\tau} \int_{\tau}^{+\infty} dG_M(s) du + \\
& \int_{\tau}^{+\infty} \int_u^{+\infty} dG_M(s) du = \\
& \tau G_M(\tau) + \tau - \tau G_M(\tau) + \\
& \int_{\tau}^{+\infty} (1 - G_M(u)) du = \\
& \tau + \int_{\tau}^{+\infty} \bar{G}_M(u) du
\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
E(\min\{t_L - t_A, \tau\}) &= \int_0^{\tau} s G_L(s) ds + \tau \bar{G}_L(\tau) = \\
G_L(\tau) \tau - \int_0^{\tau} G_L(s) ds + \tau \bar{G}_L(\tau) &= \\
\int_0^{\tau} \bar{G}_L(s) ds
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
P(t_M - t_A \leq \tau) &= 1 - P(t_M - t_A > \tau) = \\
1 - \bar{G}_M(\tau)
\end{aligned} \quad (16)$$

由所建立的系统退化过程模型可得  $t_A$  的生存函数为

$$\begin{aligned}
P(t_A > t) &= P(X_1(t) < Q_{A_1}, X_2(t) < \\
& Q_{A_2}, \dots, X_n(t) < Q_{A_n}) = H_t(Q_A)
\end{aligned} \quad (17)$$

式中:  $H_t(Q_A)$  可由式(2)获得. 在此基础上可得期望  $E(t_A)$  的表达式为

$$E(t_A) = \int_0^{+\infty} P(t_A > u) du = \int_0^{+\infty} H_u(Q_A) du \quad (18)$$

在上述推导结果基础上, 当  $\tau$  为常数时, 可得系统期望维修费用率表达式为

$$\begin{aligned}
\gamma_{\infty} &= [C_S \int_{\tau}^{+\infty} \bar{G}_M(s) ds - C_L \int_0^{\tau} \bar{G}_L(s) ds + \\
& C_L \tau + \rho(E_{\sup}(\chi_{t_A+\tau}) - E_{\sup}(\chi_{t_M})) [1 - \bar{G}_M(\tau)] + \\
& \rho E_{\sup}(\chi_{t_M}) + C_R + C_O] / [\tau + \int_{\tau}^{+\infty} \bar{G}_M(s) ds + \\
& \int_0^{+\infty} H_u(Q_A) du] + C_I
\end{aligned} \quad (19)$$

通过式(19)可以看出, 计算系统期望维修费用率的关键在于推导  $\bar{G}_M(s)$ ,  $\int_{\tau}^{+\infty} \bar{G}_M(s) ds$ ,  $\int_0^{\tau} \bar{G}_L(s) ds$ ,  $E_{\sup}(\chi_{t_M})$  和  $E_{\sup}(\chi_{t_A+\tau})$  的表达式.

根据定义,  $\bar{G}_M(s)$  和  $\bar{G}_L(s)$  分别为  $t_M - t_A$  和  $t_L - t_A$  的生存函数, 即

$$\begin{aligned}
\bar{G}_M(s) &= P(t_M - t_A > s) \\
\bar{G}_L(s) &= P(t_L - t_A > s)
\end{aligned} \quad (20)$$

基于前文中的系统相关退化过程模型, 可以通过推导获得  $\bar{G}_M(s)$ ,  $\int_{\tau}^{+\infty} \bar{G}_M(s) ds$  和  $\int_0^{\tau} \bar{G}_L(s) ds$  的表

达式为

$$\begin{aligned}
\bar{G}_M(s) &= \\
& \left. \begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{Q}_A]} \frac{\partial H_s(\mathbf{Q}_M - \mathbf{x})}{\partial s} h_v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) dv + \\
& H_s(\mathbf{Q}_M) \\
& \int_{\tau}^{+\infty} \bar{G}_M(s) ds = \int_{\tau}^{+\infty} H_s(\mathbf{Q}_M) ds - \\
& \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{Q}_A]} H_{\tau}(\mathbf{Q}_M - \mathbf{x}) h_v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) dv \\
& \int_0^{\tau} \bar{G}_L(s) ds = \\
& \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{Q}_A]} H_{\tau}(\mathbf{Q}_L - \mathbf{x}) h_v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dv - \\
& \int_0^{+\infty} H_v(\mathbf{Q}_A) dv + \int_0^{\tau} H_s(\mathbf{Q}_L) ds
\end{aligned} \right\} \quad (21)
\end{aligned}$$

式中:  $\mathbf{Q}_L - \mathbf{x} = [Q_{L_1} - x_1 \quad Q_{L_2} - x_2 \quad \dots \quad Q_{L_n} - x_n]$ ,  $\mathbf{Q}_M - \mathbf{x}$  也是类似的表示;  $\int_{\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{Q}_A]} (\cdot) d\mathbf{x}$  为关于  $[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$  的  $n$  重积分;  $H_s(\cdot)$  和  $h_v(\cdot)$  可分别由式(2)和(3)获得.

对于  $E_{\sup}(\chi_{t_M})$  和  $E_{\sup}(\chi_{t_A+\tau})$ , 由定义可知:

$$\begin{aligned}
E_{\sup}(\chi_{t_M}) &= \max \left\{ \frac{E(X_1(t_M))}{Q_{L_1}}, \frac{E(X_2(t_M))}{Q_{L_2}}, \dots, \right. \\
& \left. \frac{E(X_n(t_M))}{Q_{L_n}} \right\},
\end{aligned}$$

系统各性能退化均为 Gamma 过程, 在任意时刻退化量联合分布的边缘分布为 Gamma 分布, 根据鞅停时定理<sup>[13]</sup>, 容易得到:

$$E(X_i(t_M)) = \alpha_i \beta_i E(t_M) \quad (22)$$

式中:  $E(t_M)$  与式(18)有类似表达式, 此处不再赘述. 在此基础上, 可得:

$$\begin{aligned}
E_{\sup}(\chi_{t_M}) &= \\
& \max \left\{ \frac{\alpha_1 \beta_1 E(t_M)}{Q_{L_1}}, \frac{\alpha_2 \beta_2 E(t_M)}{Q_{L_2}}, \dots, \frac{\alpha_n \beta_n E(t_M)}{Q_{L_n}} \right\}
\end{aligned} \quad (23)$$

同理可得:

$$\begin{aligned}
E_{\sup}(\chi_{t_A+\tau}) &= \\
& \max \left\{ \frac{\alpha_1 \beta_1 (E(t_A) + \tau)}{Q_{L_1}}, \frac{\alpha_2 \beta_2 (E(t_A) + \tau)}{Q_{L_2}}, \dots, \right. \\
& \left. \frac{\alpha_n \beta_n (E(t_A) + \tau)}{Q_{L_n}} \right\}
\end{aligned} \quad (24)$$

将式(21)、(23)和(24)代入式(19)即可得到系统期望维修费用率的解析表达式.

### 3.3 期望维修费用率估算

通过前文获得的系统期望维修费用率模型, 可以得到相关的数值计算结果. 但由于模型中涉及到  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$  的高维积分, 虽然在 MATLAB 等科学计算软件中集成了高维积分的数值算法, 可以直接使用, 但算法的计算复杂度较高. 为简化计

算,下面给出模型的近似表达式.

假设系统各退化过程在订货时间点  $t_A$  的退化量已知,记为

$\mathbf{X}_{t_A} = [X_1(t_A) \ X_2(t_A) \ \cdots \ X_n(t_A)]$ ,那么容易得到:

$$\overline{G}_M(s) = P(t_M - t_A > s) = P(t_{Q_M - \mathbf{X}_{t_A}} > s) = P(\mathbf{X}_s < \mathbf{Q}_M - \mathbf{X}_{t_A}) \tag{25}$$

由于退化过程均为随机过程,所以在实际中  $\mathbf{X}_{t_A}$  为随机变量. 因此,这里用  $\mathbf{X}_{t_A}$  的期望值  $E(\mathbf{X}_{t_A}) = [E(X_1(t_A)) \ E(X_2(t_A)) \ \cdots \ E(X_n(t_A))]$  代替  $\mathbf{X}_{t_A}$ . 由此可得:

$$\overline{G}_M(s) \approx P(\mathbf{X}_s < \mathbf{Q}_M - E(\mathbf{X}_{t_A})) = H_s(\mathbf{Q}_M - E(\mathbf{X}_{t_A})) \tag{26}$$

同理可得:

$$\overline{G}_L(s) \approx H_s(\mathbf{Q}_L - E(\mathbf{X}_{t_A})) \tag{27}$$

因此,  $\int_{\tau}^{+\infty} \overline{G}_M(s)ds$  和  $\int_0^{\tau} \overline{G}_L(s)ds$  的表达式可近似为

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau}^{+\infty} \overline{G}_M(s)ds &\approx \int_{\tau}^{+\infty} H_s(\mathbf{Q}_M - E(\mathbf{X}_{t_A}))ds \\ \int_0^{\tau} \overline{G}_L(s)ds &\approx \int_0^{\tau} H_s(\mathbf{Q}_L - E(\mathbf{X}_{t_A}))ds \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

通过这种近似方法,可以避免  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$  的高维积分运算. 将式(26)和(28)代入式(19),即可得到系统期望维修费用率的近似表达式,记为  $\tilde{\gamma}_{\infty}$ . 可以看出,  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  和  $\gamma_{\infty}$  之间的差值主要是由  $E(\mathbf{X}_{t_A})$  和  $\mathbf{X}_{t_A}$  引起的,所以当  $\mathbf{X}_{t_A}$  的方差较小时,估计结果也相对较为精确;反之,误差会相应增大.

4 优化模型及算法

在上述费用模型基础上,为制定最优系统维修与备件订购策略,以系统长期运行期望维修费用率最小为优化目标,对预防性维修阈值和备件订购阈值进行优化. 基于此,建立如下优化模型

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_A^*, \mathbf{Q}_M^*) &= \operatorname{argmin} \gamma_{\infty}(\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_M) \\ \text{s. t. } \mathbf{0} &< \mathbf{Q}_A \leq \mathbf{Q}_M \leq \mathbf{Q}_L \end{aligned} \tag{29}$$

在上述决策模型中,可以看出目标函数  $TC_{\infty}$  具有非线性、不可微的特点,且模型决策变量较多,当系统存在  $n$  个退化过程时,模型有  $2n$  个决策变量,因此,难以得到模型的解析解.

为解决这一问题,采用 ABC 算法搜索系统最优维修与备件订购策略. ABC 算法是一种基于蜂群搜索蜜源行为的群体智能优化算法,在智能优化算法中属于比较新的算法,该算法控制参数少、易于实

现、全局收敛性能好,并且其优化性能优于其他一些传统智能优化算法<sup>[17]</sup>,如遗传算法(GA)、粒子群优化(PSO)算法、差分进化(DE)算法等,特别是在非线性优化函数求解方面具有良好的性能. ABC 算法已广泛应用于解决各类优化问题,关于 ABC 算法的具体机理和优化过程可参考文献[18],这里不再赘述. 在案例分析中,ABC 算法采用 MATLAB 实现.

5 案例分析

为验证上述决策优化模型的有效性,以两部件系统为例,即  $n=2$ ,对系统维修及备件订购策略进行优化,并分析相关参数对模型优化结果的影响. 考虑两种不同的情形,在案例 1 中假设系统两个退化过程参数相同,单位时间退化量均值为 2,方差为 4,故障阈值也相同;在案例 2 中假设系统两个退化过程参数存在差异,单位时间内退化量均值分别为 2 和 1.5,方差分别为 4 和 1,相应的故障阈值也不同. 不同案例的退化过程及故障阈值参数如表 1 所示.

表 1 系统退化过程及故障阈值参数

Tab. 1 Parameters of system degradation processes and failure thresholds

退化过程	案例 1			案例 2		
	$\alpha_i$	$\beta_i$	$Q_{L_i}$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$Q_{L_i}$
$i=1$	1	2	10	1	2	10
$i=2$	1	2	10	9/4	2/3	8

对于模型中的费用参数,为方便说明,假定单位时间系统状态监测费用为 1,其余各项费用值均为与状态监测费用的比值. 系统维修费用参数值如表 2 所示.

表 2 系统维修费用参数

Tab. 2 Parameters of system maintenance costs

参数	取值
$C_1$	1
$C_0$	3
$C_S$	5
$C_{LO}$	50
$C_R$	10
$\rho$	20

在 Copula 函数选择方面,以 Gaussian Copula 函数为例,描述系统两个退化过程间的相关关系,二元 Gaussian Copula 函数的分布函数为

$$C(u,v;\theta)=\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\exp\left[\frac{2\theta xy-x^2-y^2}{2(1-\theta^2)}\right]dxdy\quad(30)$$

式中： $\Phi^{-1}(\cdot)$  为标准正态分布逆函数. 当表示两个变量间为正相关关系时,  $\theta \in [0,1]$ , 在本案例中令  $\theta=0.7$ . 当然, 这里也可以采用其他类型的 Copula 函数描述退化间相关关系, 其分析过程相同.

5.1 系统维修及备件订购策略优化

在以上参数设置基础上, 假设备件订购交付时间为  $\tau=1$ . 为验证期望维修费用率式 (13) 的准确性, 在不同的维修及备件订购策略下采用 Monte-Carlo(MC)方法对维修费用进行仿真, 具体过程为: 首先对系统退化过程进行仿真, 得到备件订购时间、系统更换、系统故障时间, 进而计算系统库存费用、更换费用及停机损失, 最后得到费用具体值. 在这里重复上述过程  $10^4$  次, 得到系统维修费用的  $10^4$  个实现值. 在此基础上, 求得平均值并与解析结果进行比较, 如表 3 所示.

表 3 解析结果与仿真结果对比

Tab. 3 Comparison of analytical results and MC simulations

案例	$(Q_{A_1}, Q_{A_2}, Q_{M_1}, Q_{M_2})$	解析结果	MC 仿真结果	MC 仿真 95% 置信区间
1	(2, 2, 5, 3)	11.25	11.18	[10.75, 11.62]
	(4, 3, 6, 5)	10.07	10.02	[9.64, 10.40]
	(3, 3, 8, 8)	10.34	10.27	[9.76, 10.77]
2	(2, 2, 3, 3)	10.66	10.61	[9.88, 11.34]
	(3, 2, 5, 5, 5)	9.69	9.67	[9.13, 10.21]
	(3, 3, 7, 6)	9.58	9.52	[9.04, 10.01]

由表 3 可以看出, 解析方法得到的期望费用率与仿真结果很接近, 并且在 MC 仿真结果 95% 置信区间内, 由此说明了上述系统期望维修费用率表达式的准确性.

下面分析当备件订购阈值  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  为常数时, 系统期望维修费用率  $\gamma_{\infty}$  随预防性更换阈值  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$  的变化情况, 结果如图 3 所示.

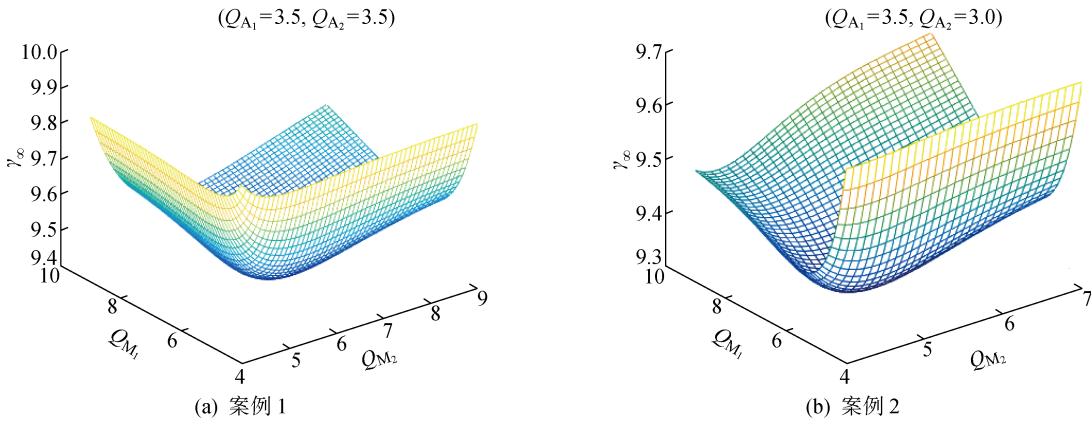


图 3  $\gamma_{\infty}$  随  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$  变化情况

Fig. 3  $\gamma_{\infty}$  versus  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$

由图 3 可以看出, 无论对于案例 1 还是案例 2, 当  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  为常数时, 随着  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$  的增大,  $\gamma_{\infty}$  总体上来说呈现先减小后增大的趋势, 这是由库存费用、维修费用增加以及系统更新周期增长共同作用的结果. 在给定的备件订购阈值下, 存在最优的  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$  使得  $\gamma_{\infty}$  达到最小. 同理, 下面固定预防性更换阈值  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$ , 分析系统期望维修费用率  $\gamma_{\infty}$  随备件订购阈值  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  的变化情况, 结果如图 4 所示.

由图 4 可以看出, 无论对于案例 1 还是案例 2, 当  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$  为常数时, 随着  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  的增大,  $\gamma_{\infty}$  总体上来说呈现先减小后增大的趋势, 这主要是受

预防性更换概率减小、故障更换概率增大以及库存费用减少的影响. 同样, 在给定的预防性更换阈值下, 存在最优的  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  使得  $\gamma_{\infty}$  达到最小.

下面基于 ABC 算法对模型进行求解, 得到最优维修及备件订购策略. 在 ABC 算法中, 设置种群数量为 10, 适应度函数为  $1/\gamma_{\infty}(Q_A, Q_M)$ . 以案例 1 为例, 考虑到算法中随机因素的影响, 运行 ABC 算法 5 次, 获得的系统维修及备件订购策略优化过程如图 5 所示, 其中:  $K$  为迭代次数; 上标 \* 表示最优.

由图 5 可以看出, 当迭代次数达到 100 次后, 最优期望费用率值不再变化, 且各优化过程均收敛于相同的最优值, 对案例 2 也有类似的结果. 当退化过



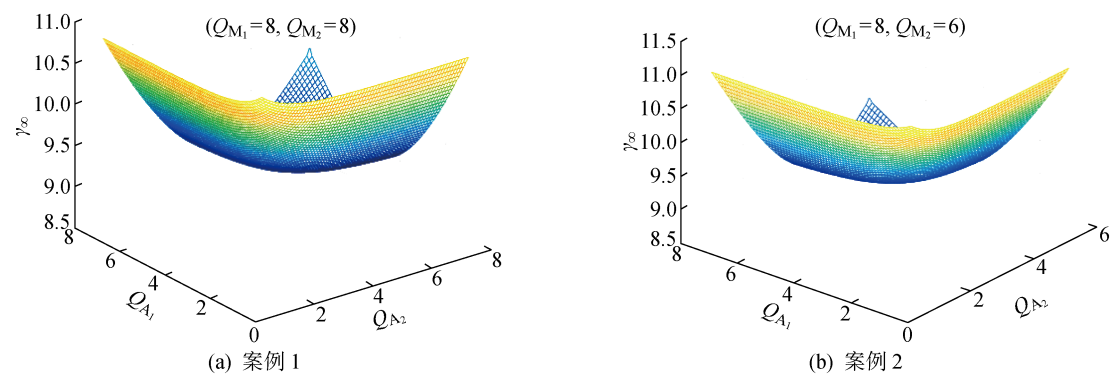


图 4  $\gamma_{\infty}$  随  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  的变化情况

Fig. 4  $\gamma_{\infty}$  versus  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$

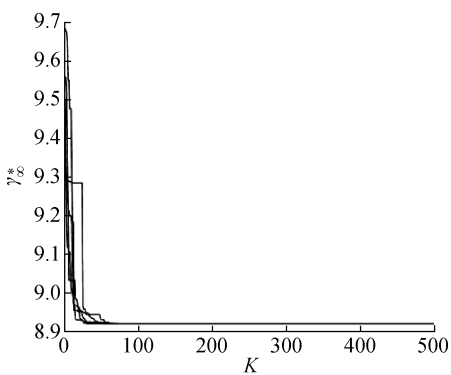


图 5 ABC 算法优化过程

Fig. 5 Optimization process of ABC algorithm

程增多时,可适当增加算法中种群数量的设置,以提高算法收敛速度及精度.在此基础上,得到的系统最优维修及备件订购策略如表 4 所示.此外,假如在这里采取文献[14]中的策略,即不单独考虑系统备件订购阈值,而是在预防性更换阈值  $(Q_{M_1}, Q_{M_2})$  处订购备件,即  $Q_{A_i} = Q_{M_i}$ .在此策略下,所获得的系统最优维修策略见表 4.

通过对比表 4 中的数据可知,相对于文献[14]中的维修策略,综合优化备件订购阈值和预防性更换阈值能够有效降低系统期望维修费用率.在案例 1 和案例 2 下系统最优维修及备件订购策略对应的系统期望维修费用率  $\gamma_{\infty}^*$  分别降低了 6.9% 和 5.9%,这是由于同时优化调整  $Q_{A_i}$  和  $Q_{M_i}$  值可以在

降低停机费用的同时,增加更新周期长度,使得系统寿命得到更为充分的利用.

为验证系统期望维修费用率的近似表达式的精确性,下面对期望维修费用率近似值  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  和精确值  $\gamma_{\infty}$  进行对比.由于在推导  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  时将  $\mathbf{X}_{t_A}$  用  $E(\mathbf{X}_{t_A})$  代替,所以这里考察不同备件订购阈值  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  下,  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  和  $\gamma_{\infty}$  的差异.如图 6 所示.

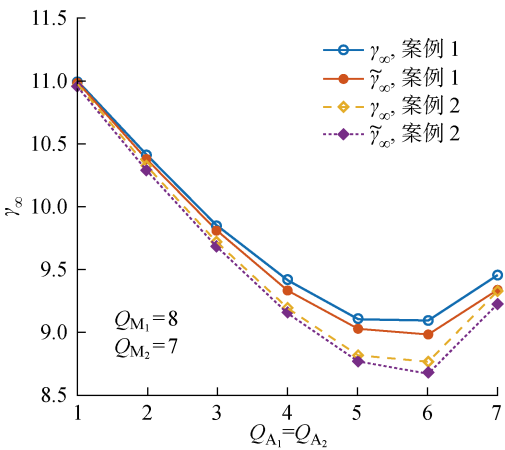


图 6 不同  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  下  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  和  $\gamma_{\infty}$  对比

Fig. 6 Comparison of  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  and  $\gamma_{\infty}$  at different  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  values

由图 6 可以看出,当  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  较小时,  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  和  $\gamma_{\infty}$  的值较为接近;随着  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  的增大,  $\tilde{\gamma}_{\infty}$  和  $\gamma_{\infty}$

表 4 系统最优维修及备件订购策略

Tab. 4 Optimal system maintenance and spare parts ordering policy

维修策略	案例 1					案例 2				
	$Q_{A_1}^*$	$Q_{A_2}^*$	$Q_{M_1}^*$	$Q_{M_2}^*$	$\gamma_{\infty}^*$	$Q_{A_1}^*$	$Q_{A_2}^*$	$Q_{M_1}^*$	$Q_{M_2}^*$	$\gamma_{\infty}^*$
本文	5.92	5.92	8.03	8.03	8.922	6.07	5.35	7.96	6.50	8.649
文献[14]	—	—	6.06	6.06	9.586	—	—	6.94	4.80	9.192



的差值也逐渐增大,但最大差值仅为 0.12,在精度要求不是很严格时,可以用  $\tilde{\gamma}_\infty$  代替  $\gamma_\infty$  以简化计算.  $\tilde{\gamma}_\infty$  和  $\gamma_\infty$  差值增大的原因主要是因为  $(Q_{A_1}, Q_{A_2})$  变大导致退化达到备件订购阈值的期望时间增大,从而退化量在该时间点的方差变大,所以导致估计结果的误差也相应变大.

5.2 灵敏度分析

首先分析备件交付时间对系统最优维修及备件订购策略的影响,当备件交付时间  $\tau$  发生变化时,对于案例 1 和案例 2,  $(Q_{A_1}^*, Q_{A_2}^*, Q_{M_1}^*, Q_{M_2}^*)$  和  $\gamma_\infty^*$  的变化情况如图 7 所示.

由图 7 可以看出,无论是在案例 1 还是案例 2 的情形下,随着备件交付时间  $\tau$  的增长,最优备件订购阈值  $(Q_{A_1}^*, Q_{A_2}^*)$  和预防性更换阈值  $(Q_{M_1}^*, Q_{M_2}^*)$  均呈下降趋势,最优期望维修费用率  $\gamma_\infty^*$  则是逐渐上升的. 这是由于总体上来说,随着备件交付时间的增

长,导致不能对退化严重系统及时进行更换,维修费用和停机损失会增加,因此,需要降低备件订购阈值. 这将会导致库存费用的增加,预防性更换阈值降低是为了平衡库存费用和预防性更换费用. 此外,由图 7 还可以看出  $\tau$  的变化对  $(Q_{A_1}^*, Q_{A_2}^*)$  影响较大,而对  $(Q_{M_1}^*, Q_{M_2}^*)$  影响相对较小.

下面分析  $\theta$  的变化对系统最优维修及备件订购策略的影响,在案例 1 和案例 2 规定的情形下,计算结果如表 5 所示.

由表 5 可以看出,当  $Q$  发生变化时,系统的最优维修及备件订购策略也发生了一定变化. 当相关系数增大时,预防性更换阈值  $(Q_{M_1}^*, Q_{M_2}^*)$  的值逐渐减小,而备件订购阈值  $(Q_{A_1}^*, Q_{A_2}^*)$  的变化趋势不明显,最优期望维修费用率  $\gamma_\infty^*$  值逐渐减小.  $\gamma_\infty^*$  值的减小是由于随着相关系数的增大,系统可靠性也随之提高的原因.

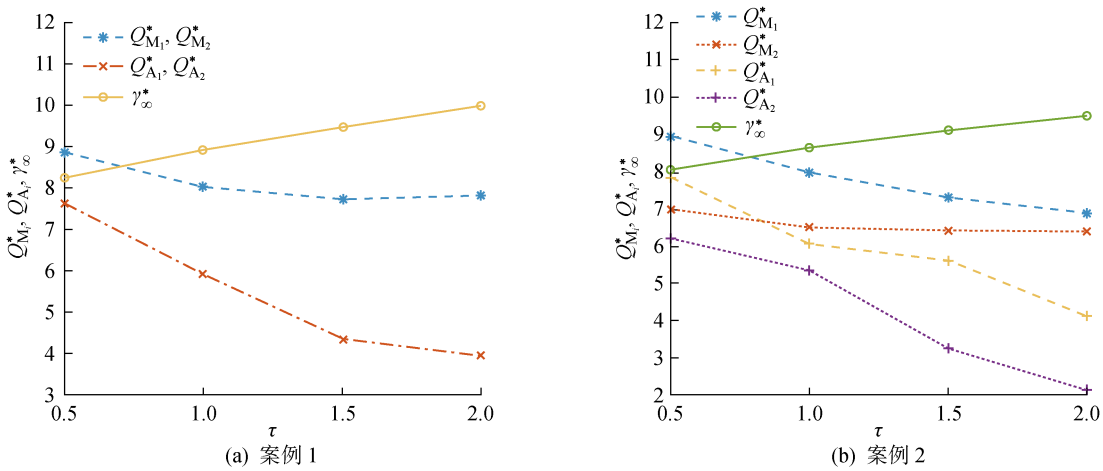


图 7 备件交付时间对优化结果的影响  
Fig. 7 Influence of spare parts delivery time on optimization results

表 5 不同  $\theta$  下的系统最优维修及备件订购策略

$\theta$	案例 1					案例 2				
	$Q_{A_1}^*$	$Q_{A_2}^*$	$Q_{M_1}^*$	$Q_{M_2}^*$	$\gamma_\infty^*$	$Q_{A_1}^*$	$Q_{A_2}^*$	$Q_{M_1}^*$	$Q_{M_2}^*$	$\gamma_\infty^*$
0	5.96	5.96	8.53	8.53	9.103	7.18	5.20	8.31	6.83	9.006
0.5	6.07	6.07	8.19	8.19	8.996	6.07	5.44	8.07	6.59	8.763
0.7	5.92	5.92	8.03	8.03	8.922	6.07	5.35	7.96	6.50	8.649
0.9	5.14	5.14	7.82	7.82	8.643	6.27	4.91	7.84	6.39	8.491

6 结语

多元退化系统 CBM 决策通常需要考虑不同退化过程间的相关性. 在维修策略中同时考虑预防性更换阈值和备件订购阈值,在推导系统退化状态到

达各阈值时间联合分布基础上,得到了连续监测条件下的系统期望维修费用率精确和近似表达式. 在案例分析中,通过 ABC 算法得到了最优维修和备件订购策略,验证了模型和算法的有效性. 通过和已有策略的对比表明了所提系统维修和备件订购策略的

优势.同时,在案例中也检验了系统期望维修费用近似表达式的精度,分析了备件交付时间和退化相关程度参数对决策结果的影响.值得注意的是,本文采用 Gamma 过程建立退化过程模型,事实上,对于包含 Gamma 过程的 Levy 过程来说,上述模型也同样适用.此外,对于一些非 Copula 相关的多元退化系统在连续监测下的维修阈值优化问题,可参考上述方法建立优化模型.

## 参考文献:

- [1] LEE J, WU F J, ZHAO W, *et al.* Prognostics and health management design for rotary machinery systems—Reviews, methodology and applications[J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2014, 42 (1/2): 314-334.
- [2] DE JONGE B, TEUNTER R, TINGA T. The influence of practical factors on the benefits of condition-based maintenance over time-based maintenance[J]. **Reliability Engineering & System Safety**, 2017, 158: 21-30.
- [3] OLDE KEIZER M C A, FLAPPER S D P, TEUNTER R H. Condition-based maintenance policies for systems with multiple dependent components: A review[J]. **European Journal of Operational Research**, 2017, 261(2): 405-420.
- [4] PAN Z Q, BALAKRISHNAN N. Reliability modeling of degradation of products with multiple performance characteristics based on gamma processes[J]. **Reliability Engineering & System Safety**, 2011, 96 (8): 949-957.
- [5] WANG X L, BALAKRISHNAN N, GUO B. Residual life estimation based on nonlinear-multivariate Wiener processes[J]. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 2015, 85(9): 1742-1764.
- [6] RASMEKOMEN N, PARLIKAD A K. Condition-based maintenance of multi-component systems with degradation state-rate interactions[J]. **Reliability Engineering & System Safety**, 2016, 148: 1-10.
- [7] 杨志远, 赵建民, 程中华. 退化相关多部件系统预防性维修决策模型[J]. **系统工程与电子技术**, 2018, 40(4): 823-832.  
YANG Zhiyuan, ZHAO Jianmin, CHENG Zhonghua. Preventive maintenance decision model of multi-component system with degradation interaction[J]. **Systems Engineering and Electronics**, 2018, 40 (4): 823-832.
- [8] WANG X L, BALAKRISHNAN N, GUO B, *et al.* Residual life estimation based on bivariate non-stationary gamma degradation process[J]. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 2015, 85(2): 405-421.
- [9] WANG X L, GUO B, CHENG Z J. Residual life estimation based on bivariate Wiener degradation process with time-scale transformations[J]. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 2014, 84 (3): 545-563.
- [10] HONG H P, ZHOU W, ZHANG S, *et al.* Optimal condition-based maintenance decisions for systems with dependent stochastic degradation of components[J]. **Reliability Engineering & System Safety**, 2014, 121: 276-288.
- [11] ZHANG N L, YANG Q Y. Optimal maintenance planning for repairable multi-component systems subject to dependent competing risks[J]. **IIE Transactions**, 2015, 47(5): 521-532.
- [12] LI H P, DELOUX E, DIEULLE L. A condition-based maintenance policy for multi-component systems with Lévy copulas dependence[J]. **Reliability Engineering & System Safety**, 2016, 149: 44-55.
- [13] BÉRENGUER C, GRALL A, DIEULLE L, *et al.* Maintenance policy for a continuously monitored deteriorating system[J]. **Probability in the Engineering and Informational Sciences**, 2003, 17(2): 235-250.
- [14] MERCIER S, PHAM H H. A preventive maintenance policy for a continuously monitored system with correlated wear indicators[J]. **European Journal of Operational Research**, 2012, 222(2): 263-272.
- [15] CHERUBINI U, LUCIANO E, VECCHIATO W. Copula methods in finance[M]. Oxford, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2004: 154-160.
- [16] 王浩伟, 徐廷学, 刘勇. 基于随机参数 Gamma 过程的剩余寿命预测方法[J]. **浙江大学学报(工学版)**, 2015, 49(4): 699-704.  
WANG Haowei, XU Tingxue, LIU Yong. Remaining useful life prediction method based on Gamma processes with random parameters[J]. **Journal of Zhejiang University (Engineering Science)**, 2015, 49 (4): 699-704.
- [17] KARABOGA D, AKAY B. A comparative study of Artificial Bee Colony algorithm[J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2009, 214(1): 108-132.
- [18] KARABOGA D, BASTURK B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee colony (ABC) algorithm[J]. **Journal of Global Optimization**, 2007, 39(3): 459-471.

(本文编辑:石易文)