

基于非局部 Biot 理论的平面波作用下 饱和地基动力响应

王 宁^{1,2}, 丁海滨^{1,2}, 童立红^{1,2}, 蒋亚龙^{1,2}

(1. 华东交通大学 江西省岩土工程基础设施安全与控制重点实验室,南昌 330013;

2. 江西省地下空间技术开发工程中心,南昌 330013)

摘 要: 为探究孔隙尺寸效应对饱和土地基动力响应的影响,基于非局部-Biot 理论,构建了 P 波及 SV 波作用下饱和土地基表面动力响应的计算模型.采用波函数展开法,求解了地表位移及应力的解析解.分析了孔隙尺寸(以非局部参数描述)、入射波频率及入射角对地表位移及应力响应的影响.结果表明:低频下,非局部 Biot 理论计算结果与经典 Biot 理论计算结果基本一致;高频时,地表位移及应力随非局部参数变化较为明显,即高频率下,孔隙尺寸效应对地表响应影响不可忽略.入射波频率对地表响应的影响与孔隙尺寸有关,孔隙越大,频率影响越为显著.相同幅值的 P 波及 SV 波作用下,SV 波引起的地表动力响应大于 P 波,且 SV 波在入射角为 45° 时发生全反射.研究成果可为半空间饱和土中波动问题的研究提供借鉴.

关键词: 饱和土;非局部-Biot 理论;孔隙尺寸;孔隙动应力;非局部参数

中图分类号: TU 312

文献标志码: A

Dynamic Responses of Saturated Soil Foundation Subjected to Plane Wave Based on Nonlocal-Biot Theory

WANG Ning^{1,2}, DING Haibin^{1,2}, TONG Lihong^{1,2}, JIANG Yalong^{1,2}

(1. Jiangxi Key Laboratory of Infrastructure Safety Control in Geotechnical Engineering,

East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Engineering Research and

Development Centre for Underground Technology of Jiangxi Province, Nanchang 330013, China)

Abstract: To investigate the influence of pore size effect on dynamic response of saturated soil foundation, a model for predicting the dynamic response of the ground surface of the saturated soil foundation under incident P wave and SV wave is proposed based on the nonlocal-Biot theory. The analytical solution is obtained using the wave function expansion method. The influence of pore size described by nonlocal parameter, input frequency, and the incident angle on the dynamic response of displacement and stress is discussed in detail. The results show that at low frequencies, the calculation results of the nonlocal-Biot theory are basically the same as those of the classical Biot theory. At high frequencies, the surface displacement and stress change significantly with nonlocal parameters, that is, at high frequencies, the

收稿日期: 2020-05-22

基金项目: 研究生创新基金(YC2019-B105),国家自然科学基金地区基金(51868021),国家自然科学基金青年基金(11702095),国家杰出青年基金(51725802),高铁联合基金(U1934208),江西省自然科学基金(20192BAB216031),江西省教育厅自然科学基金(GJJ190300)

作者简介: 王 宁(1983-),男,山东省东营市人,讲师,主要从事基础动力学与土动力学及动力检测技术应用等研究.

通信作者: 丁海滨,男,博士生;E-mail: hbding@ecjtu.edu.cn.

effect of pore size on the surface response cannot be ignored. The influence of incident wave frequency on the ground-surface response is related to pore size, that is, the larger the pore size, the more significant the frequency effect. The influence of SV wave on the dynamic response of ground surface is larger than that of P wave. Besides, the total reflection phenomenon is observed at an incident angle of 45° for the incident of SV wave. The results obtained in this work can provide reference for studying the problem of wave propagation in half-space saturated soil foundation.

Key words: saturated soil; nonlocal-Biot theory; pore size; pore dynamic stress; nonlocal parameter

关于弹性波传播至两种介质交界面的反射及折射问题,国内外学者已经做了充分的研究^[1-3].但以往对于饱和土中弹性波传播问题的研究基本都是基于经典 Biot 理论^[4].然而,Biot 理论的建立是基于波长远大于饱和土中的孔隙尺寸的假设,但理论^[5-8]及试验^[9-10]研究均表明,在高频下,波长远大于孔隙尺寸的假设已不再成立,此时,孔隙材料的孔隙尺寸对波传播特性具有显著的影响.此外,波的传播会引起土颗粒的运动,由此会导致土颗粒产生惯性力(孔隙动应力),显然此惯性力随入射频率的增加而增大,而 Biot 理论假定孔隙尺寸为常数.因此,其理论中未考虑孔隙尺寸及孔隙动应力对波传播特性的影响.

为解决上述问题,Chakraborty 等^[11]结合经典非局部弹性理论^[12]和 Biot 理论^[4]预测了饱和多孔材料中波的传播特性,但其由于考虑了流体的非局部效应,对 Biot 理论进行过修正,而使其预测结果与实验结果产生一定的偏差.Tong 等^[13]摒弃了流体部分非局部效应,提出了仅考虑土骨架非局部效应的非局部-Biot 理论模型,分析了饱和土中波速的传播及其衰减规律,其结果与 Bouzidi 等^[9]的试验结果吻合得很好,以此说明了所提出模型的合理性.随后,徐长节等^[14]、Xu 等^[15]及 Ding 等^[16]基于非局部-Biot 理论研究了饱和土中深埋、浅埋圆形衬砌及浅埋复合式衬砌对入射 P 波的散射问题.结果表明,高频下孔隙尺寸对衬砌动应力影响显著,而低频情况下,非局部-Biot 理论解与经典 Biot 理论解基本一致.Tong 等^[17]利用非局部-Biot 理论,分析了非局部参数对饱和土中 Rayleigh 波的传播特性的影响,结果仍表明高频下孔隙尺寸对波传播特性的影响不可忽略.由以上分析可知,高频下,饱和土中孔隙尺寸及孔隙动应力会对波的传播特性产生较大的影响,为此,研究孔隙尺寸在平面波作用下对地表动力响应的影响显得尤为重要.

本文基于非局部-Biot 理论,构建了 P 波及 SV 波入射下,饱和土地基地表响应计算模型,采用波函

数展开法,得出了地表位移及水平应力的解析解,通过算例分析研究了非局部参数、入射波频率及入射角对地表位移及应力响应影响的变化规律.

1 计算模型

假设平面 P_1 (SV) 波以入射角为 θ_a (θ_β) 经饱和土半空间传播至地表,如图 1 所示.饱和土地基为典型的两相介质,因此,入射波经地表反射将产生 P_1 、 P_2 及 SV 波.

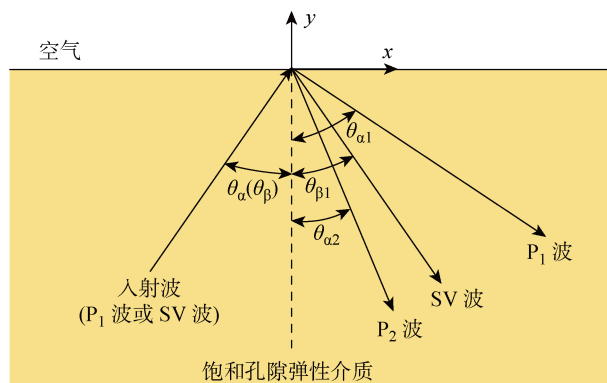


图 1 计算模型

Fig. 1 Calculation model

P_1 波入射时:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{s1}^i &= \varphi_0 \exp[jk_{a1}(x \sin \theta_a + y \cos \theta_a)] \\ \varphi_{s1}^r &= K_{p1} \exp[jk_{a1}(x \sin \theta_{a1} - y \cos \theta_{a1})] \\ \varphi_{s2}^r &= K_{p2} \exp[jk_{a2}(x \sin \theta_{a2} - y \cos \theta_{a2})] \\ \varphi^r &= K_{p3} \exp[jk_{\beta}(x \sin \theta_{\beta 1} - y \cos \theta_{\beta 1})] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

SV 波入射时:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^i &= \varphi_0 \exp[jk_{\beta}(x \sin \theta_{\beta} + y \cos \theta_{\beta})] \\ \varphi_{s1}^r &= K_{sv1} \exp[jk_{a1}(x \sin \theta_{a1} - y \cos \theta_{a1})] \\ \varphi_{s2}^r &= K_{sv2} \exp[jk_{a2}(x \sin \theta_{a2} - y \cos \theta_{a2})] \\ \varphi^r &= K_{sv3} \exp[jk_{\beta}(x \sin \theta_{\beta 1} - y \cos \theta_{\beta 1})] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: i, r 分别代表入射波及反射波; $\varphi_{s1}^i, \varphi^i$ 分别为入射 P 波或入射 SV 波势函数; $\varphi_{s1}^r, \varphi_{s2}^r$ 和 φ^r 分别为反射 P_1 波、 P_2 波及 SV 波势函数; φ_0, φ_0 为入射 P_1

波和 SV 波势函数幅值; K_{p1} 、 K_{p2} 、 K_{p3} 和 K_{sv1} 、 K_{sv2} 、 K_{sv2} 分别为 P 波及 SV 波入射下 P_1 、 P_2 及 SV 波的反射系数; j 为虚数单位,满足 $j^2 = -1$; k_{a1} 、 k_{a2} 、 k_{β} 分别为 P_1 、 P_2 及 SV 波波数; θ_{a1} 、 θ_{a2} 及 $\theta_{\beta 1}$ 表示 P_1 、 P_2 及 SV 波的入射及反射角,满足关系 $k_{a1} \sin \theta_{a1} = k_{a2} \sin \theta_{a2} = k_{\beta} \sin \theta_{\beta} = k_{a1} \sin \theta_{a1}$.

2 非局部-Biot 理论控制方程

根据文献[13]可知,饱和孔隙弹性介质的非局部-Biot 理论的运动方程为

本构方程:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= (1 - \tau^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^L \\ \sigma_{ij}^L &= 2\mu \epsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda_c \epsilon - \alpha M \zeta) \\ P_f &= -\alpha M \epsilon + M \zeta \\ \epsilon &= \text{div } \mathbf{u} \\ \zeta &= -\text{div } \mathbf{w} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: σ_{ij} 、 σ_{ij}^L 分别为非局部-Biot 和经典 Biot 理论中应力张量; τ 为非局部参数,表征饱和土中孔隙尺寸及孔隙动力效应^[13]; $\mu = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K_{\text{dry}}$ 为切变模量, ν 为波松比; $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 为应变张量; δ_{ij} 为 Kronecker 符号,当 $i = j$ 时 $\delta_{ij} = 1$, $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$; $\lambda_c = \lambda + \alpha^2 M$, λ 为 Lamé 常数; ϵ 为体积应变; ζ 为单位体积内流体变化量; $\alpha = 1 - K_{\text{dry}}/K_g$, $M = Q/[n_0(\alpha - n_0)]$ 为 Biot 参数, K_{dry} 为土骨架体积模量, K_g 为土颗粒模量, $Q = [n_0 K_g (1 - n_0 - K_{\text{dry}}/K_g)] / [(1 - n_0 - K_{\text{dry}}/K_g) + n_0 K_g/K_f]$, n_0 为孔隙比, K_f 为流体体积模量; \mathbf{u} 、 \mathbf{w} 为土骨架位移及流体相对土骨架位移矢量。

运动方程:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \alpha^2 M + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} &= \\ (1 - \tau^2 \nabla^2) (\rho \ddot{\mathbf{u}}_i + \rho_f \ddot{\mathbf{w}}_i) & \\ \alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + M \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} &= \rho_f \ddot{\mathbf{u}}_i + m \ddot{\mathbf{w}}_i + b \dot{\mathbf{w}}_i \end{aligned} \quad (4)$$

式中: ρ 为土体密度; ρ_f 为流体密度; $m = \rho_f/n_0$, $b = \eta F(\xi)/k$, η 为流体黏滞系数, k 为流体渗透系数; $F(\xi)$ 为高频下黏性修正系数,其表达式为^[18]

$$F(\xi) = \frac{\zeta T(\zeta)}{4(1 + 2iT(\zeta)/\zeta)} \quad (5)$$

式中: $\zeta = \delta \sqrt{f/f_c}$, 圆孔状孔隙时, $\delta = \sqrt{8\xi}$, 裂缝状孔隙时, $\delta = \sqrt{16\xi/3}$, ξ 为弯曲因子, f 为入射波频率, f_c 为临界频率; $T(\zeta) = \frac{\text{ber}'(\zeta) + j\text{bei}'(\zeta)}{\text{ber}(\zeta) + j\text{bei}(\zeta)}$, ber 和 bei 分别为第一类零阶阶尔文的实部和虚部。

3 波场的求解

3.1 饱和土中散射波场的求解

为求解式(4),引入土骨架标量和矢量势函数 φ_s 和 Ψ_s , 及流体部分标量及矢量势函数 φ_f 和 Ψ_f , 根据 Helmholtz 分解定理,饱和土中位移场可表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \varphi_s + \nabla \times \Psi_s \\ \mathbf{w} &= \nabla \varphi_f + \nabla \times \Psi_f \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(6)带入式(4),并消去 φ_f 和 Ψ_f , 可得:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi_{s1} + k_{a1}^2 \varphi_{s1} &= 0 \\ \nabla^2 \varphi_{s2} + k_{a2}^2 \varphi_{s2} &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_s + k_{\beta}^2 \Psi_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: k_{β} 为剪切波波数, 满足

$$\begin{aligned} k_{aj}^2 &= \frac{\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2}}{2} \quad (j = 1, 2) \\ k_{\beta}^2 &= \frac{\beta_1^2 - \beta_3 \beta_7}{\beta_7 \beta_8 - \beta_4 \beta_9} \end{aligned}$$

参数关系为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\beta_1 \beta_7 - \beta_3 \beta_6 + \beta_2 \beta_4 + \beta_4 \beta_5}{\beta_1 \beta_6 - \beta_2 \beta_5} \\ \lambda_2 &= \frac{\beta_3 \beta_7 - \beta_1^2}{\beta_1 \beta_6 - \beta_2 \beta_5} \\ \beta_1 &= (\lambda + \alpha^2 M + 2\mu - \rho \omega^2 \tau^2) \\ \beta_2 &= \alpha M - \rho_f \omega^2 \tau^2 \\ \beta_3 &= -\rho \omega^2, \quad \beta_4 = -\rho_f \omega^2 \\ \beta_5 &= \alpha M, \quad \beta_6 = M \\ \beta_7 &= -\left(\frac{\alpha \rho_f}{n_0} \omega^2 + \frac{j\omega \eta}{k} F(\xi)\right) \\ \beta_8 &= \mu - \rho \tau^2 \omega^2 \\ \beta_9 &= -\rho_f \tau^2 \omega^2 \end{aligned}$$

其中: ω 为圆角频率。

由式(7)可知,饱和多孔介质中存在两种 P 波,土骨架部分的 P 波势函数可表示为

$$\varphi_s = \varphi_{s1} + \varphi_{s2} \quad (8)$$

同理,由式(4)和(6)可得流体部分 P 波和 SV 波势函数为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_f &= \xi_1 \varphi_{s1} + \xi_2 \varphi_{s2} \\ \Psi_f &= \xi_3 \Psi_s \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: ξ_1 、 ξ_2 及 ξ_3 为流体部分势函数与土骨架部分势函数的比值,其表达式为

$$\begin{aligned} \xi_j &= \frac{\beta_2 \beta_4 - \beta_3 \beta_6 + (\beta_5 \beta_2 - \beta_1 \beta_6) k_{aj}^2}{\beta_4 \beta_6 - \beta_2 \beta_7} \quad (j = 1, 2) \\ \xi_3 &= -\beta_4 / \beta_7 \end{aligned}$$

3.2 饱和土中总波场

饱和土中总波场由入射波场和散射波场构成,本文考虑入射波场分别为 P 波和 SV 波情况。

入射波为 P 波时:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s &= \varphi_{s1}^r + \varphi_{s2}^r + \varphi^i \\ \Psi_s &= \Psi^r \\ \varphi_f &= \xi_1 (\varphi_{s1}^r + \varphi^i) + \xi_2 \varphi_{s2}^r \\ \Psi_f &= \xi_3 \Psi^r \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

入射波为 SV 波时:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s &= \varphi_{s1}^r + \varphi_{s2}^r \\ |\Psi_s| &= \psi^i + |\Psi^r| \\ \varphi_f &= \xi_1 \varphi_{s1}^r + \xi_2 \varphi_{s2}^r \\ \Psi_f &= \xi_3 (\Psi^r + \Psi^i) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

此处需要说明的是,入射波为 SV 波时,由于 P_1 波波速通常大于 SV 波波速,当 SV 波的入射角达到临界角 θ_{cr1} 时, P_1 波的反射角将大于 90° ,此时, P_1 波表现出随深度增加,其幅值呈指数减小的非均匀波.与此同时,在软黏土介质中, P_2 波波速也有可能大于 SV 波波速,此时将存在第二个临界角 θ_{cr2} . 由波的反射关系,可得两个临界角为

$$\left. \begin{aligned} \theta_{cr1} &= \sin^{-1}(k_{a1}/k_b) \\ \theta_{cr2} &= \sin^{-1}(k_{a2}/k_b) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

为便于分析,将式(2)表示为

$$\left. \begin{aligned} \psi^i &= \psi_0 \exp(jkx + \nu_\beta y) \\ \varphi_{s1}^r &= K_1 \exp(jkx - \nu_{a1} y) \\ \varphi_{s2}^r &= K_2 \exp(jkx - \nu_{a2} y) \\ \Psi^r &= K_3 \exp(jkx - \nu_{a3} y) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: K_1 、 K_2 及 K_3 为反射波待定系数,

$$k = k_\beta \sin \theta_\beta = k_{a1} \sin \theta_{a1} = k_{a2} \sin \theta_{a2}$$

$$\nu_\beta = jk_\beta \cos \theta_\beta = j \sqrt{k_\beta^2 - k^2}$$

$$\nu_{a1} = jk_{a1} \cos \theta_{a1} = \begin{cases} j \sqrt{k_{a1}^2 - k^2}, & \theta_\beta \leq \theta_{cr1} \\ -\sqrt{k^2 - k_{a1}^2}, & \theta_\beta > \theta_{cr1} \end{cases}$$

$$\nu_{a2} = jk_{a2} \cos \theta_{a2} = \begin{cases} j \sqrt{k_{a2}^2 - k^2}, & \theta_\beta \leq \theta_{cr2} \\ -\sqrt{k^2 - k_{a2}^2}, & \theta_\beta > \theta_{cr2} \end{cases}$$

4 边界条件及待定系数求解

4.1 应力位移与势函数关系

由式(3)可知,非局部-Biot 应力张量与经典 Biot 理论应力张量满足

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2n} \nabla^{2n} \sigma_{ij}^L$$

由于非局部参数 τ 为很小量,所以,可将高阶无

穷小项 $\sum_{n=2}^{\infty} \tau^{2n} \nabla^{2n} \sigma_{ij}^L$ 略去. 于是,可将非局部-Biot 本构关系可写为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L + \tau^2 \nabla^2 \sigma_{ij}^L$$

即

$$\sigma_{ij} = (1 + \tau^2 \nabla^2) [2\mu \epsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda_e \epsilon - \alpha M \zeta)] \quad (14)$$

结合式(3)、(6)及(14),应力、位移与势函数关系可表示为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial y} \\ u_y &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial x} \\ w_x &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial y} \\ w_y &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_f}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= (1 + \tau^2 \nabla^2) \left[2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} \right) - \alpha P_f \right] \\ \sigma_{xx} &= (1 + \tau^2 \nabla^2) \left[2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial y \partial x} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} \right) - \alpha P_f \right] \\ \sigma_{xy} &= \mu (1 + \tau^2 \nabla^2) \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x^2} \right) \\ P_f &= -\alpha M \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} \right) - M \left(\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: u_x 、 u_y 分别为 x 、 y 方向土骨架位移; w_x 、 w_y 分别为 x 、 y 方向流体相对土骨架位移; σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{xy} 分别为 x 、 y 方向正应力与切应力; P_f 为孔隙水压力.

4.2 边界条件

考虑到地表零应力及透水特性,可将其边界条件表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= 0 \\ P_f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式(1)和(13)分别代入式(15),并结合式(16)可求出 P 波及 SV 波入射下势函数的待定系数,待定系数求解方程组如下^[3].

P 波入射:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \varphi_0 \begin{bmatrix} -G_{11} \\ G_{21} \\ -G_{31} \end{bmatrix} \quad (17)$$

SV 波入射:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \psi_0 \begin{bmatrix} G_{13} \\ -G_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

系数矩阵表达式见表 1.

通过式(17),并结合表 1 即可求出反射系数,从而可利用式(15)求解出饱和土中位移及应力表达式.

表 1 系数矩阵表达式
Tab. 1 Expression of coefficient matrix

系数	P 波	SV 波
G_{1i}	$k_{ai}^2 (k_{ai}^2 \tau^2 - 1)(\lambda_c + \mu + \xi_i \alpha M + \mu \cos 2\theta_{ai})$	$[-1 + \tau^2 (k^2 - \nu_{ai}^2)][k^2 (\lambda_c + \alpha M \xi_i) - \nu_{ai}^2 (\lambda_c + 2\mu + \alpha M \xi_i)]$
G_{13}	$\mu k_{bi}^2 (k_{bi}^2 \tau^2 - 1) \sin 2\theta_{\beta}$	$-2jk_{\mu} \nu_{\beta} [-1 + \tau^2 (k^2 - \nu_{\beta}^2)]$
G_{2i}	$-\mu k_{ai}^2 (k_{ai}^2 \tau^2 - 1) \sin 2\theta_{ai}$	$2jk_{\mu} \nu_{ai} [-1 + \tau^2 (k^2 - \nu_{ai}^2)]$
G_{23}	$\mu k_{\beta}^2 (k_{\beta}^2 \tau^2 - 1) \cos 2\theta_{\beta}$	$\mu (k^2 - k^4 \tau^2 + \nu_{\beta}^2 + \tau^2 \nu_{\beta}^4)$
G_{3i}	$k_{ai}^2 M (\xi_i + \alpha)$	$M (k^2 - \nu_{ai}^2) (\alpha + \xi_i)$

5 结果与讨论

实际工程中人们所关心的问题是地表的位移及应力变化,地表位移可采用式(15)中第 1 式计算,所得出的位移为与入射波幅值的比值(本文取入射波幅值为 $\varphi_0=1$),因此后续分析中的位移为无量纲位移,针对 P 波和 SV 波入射分别采用 k_{a1} 和 k_{β} 对其位移进行无量纲化. 地表应力采用无量纲应力,即

$$\sigma_x^* = \sigma_{xx} / \sigma_0 \tag{19}$$

式中: $\sigma_0 = (\lambda + 2\mu)k_{a1}^2$ (P 波入射), $\sigma_0 = (\lambda + 2\mu)k_{\beta}^2$ (SV 波入射).

5.1 结果验证

为验证本文结果的合理性,将本文计算结果与

Lin^[3]结果进行对比(见图 2),为此,取流体黏滞系数 $\eta=0$,P 波及 SV 波入射下,同样水平位移 (U_x) 及竖向位移(U_y) 分别采用 k_{a1} 和 k_{β} 进行无量纲化,其余参数见文献[3]. 由图 2 可知,P 波及 SV 波入射下,本文水平及竖向位移计算结果与文献[3]结果一致,由此说明本文计算结果的正确性.

5.2 算例分析

为充分分析 P 波及 SV 波作用下饱和地基地表动力响应情况,本文选取饱和土体计算参数,见表 2 所示.

图 3、4 分别为 P 波及 SV 波作用下,地表位移及应力随非局部参数的变化曲线(入射角为 30°). 由图可知,当入射频率 $f=10$ Hz 时,地表位移及应

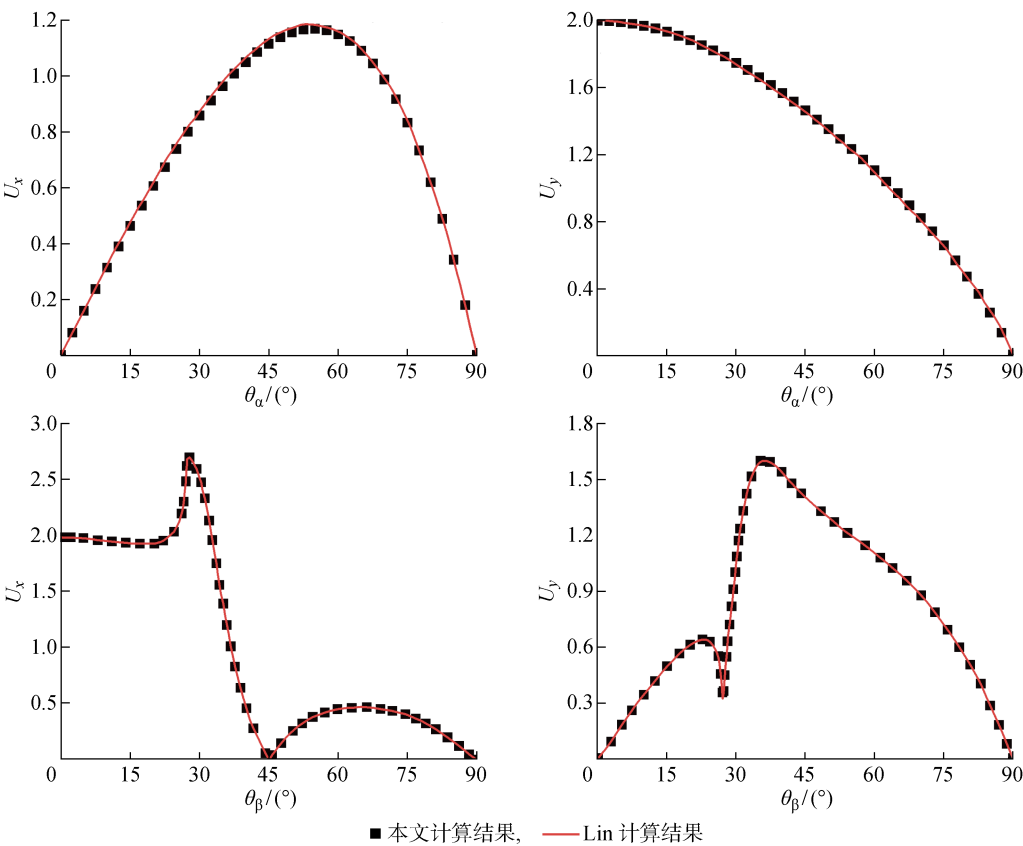


图 2 本文结果与文献[3]结果对比曲线
Fig. 2 Comparison of results obtained in this paper with those in Ref. [3]

表 2 饱和土体物理力学参数

Tab. 2 Physical and mechanics parameters of saturated soil

参数	数值	参数	数值
土颗粒密度 $\rho_s/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 650	渗透系数 $k/(\text{m}^{-2})$	1.0×10^{-8}
流体密度 $\rho_l/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1 000	黏滞系数 $\eta/(\text{Pa} \cdot \text{s})$	1.0×10^{-3}
孔隙比 n_0	0.30	Biot 参数 α	0.998 2
泊松比 ν	0.30	Biot 参数 M/MPa	5 859.2
土颗粒模量 K_g/GPa	36.0	弯曲因子 ξ	1
流体体积模量 K_l/GPa	2.0	孔隙半径 $a/\mu\text{m}$	23
拉梅常数 λ/MPa	49.7		

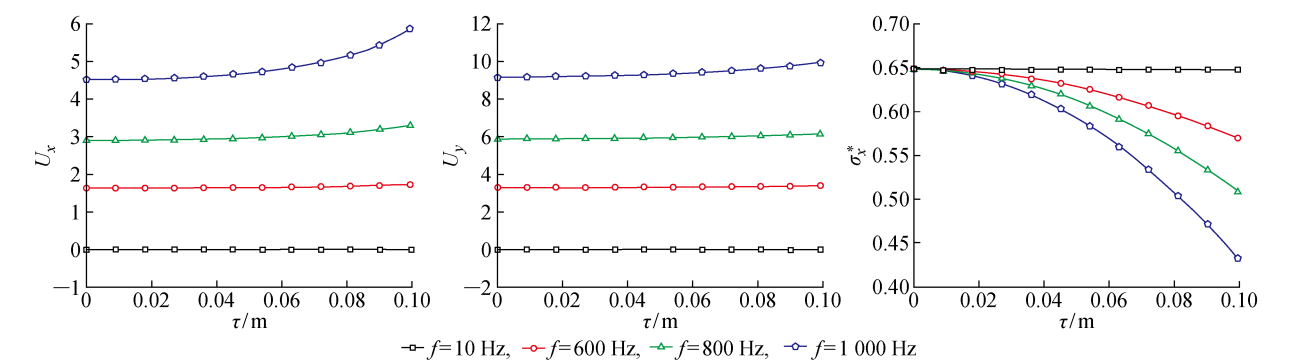


图 3 P 波入射下地表位移及应力随非局部参数的变化

Fig. 3 Displacement and stress of ground surface versus nonlocal parameter subjected to P wave

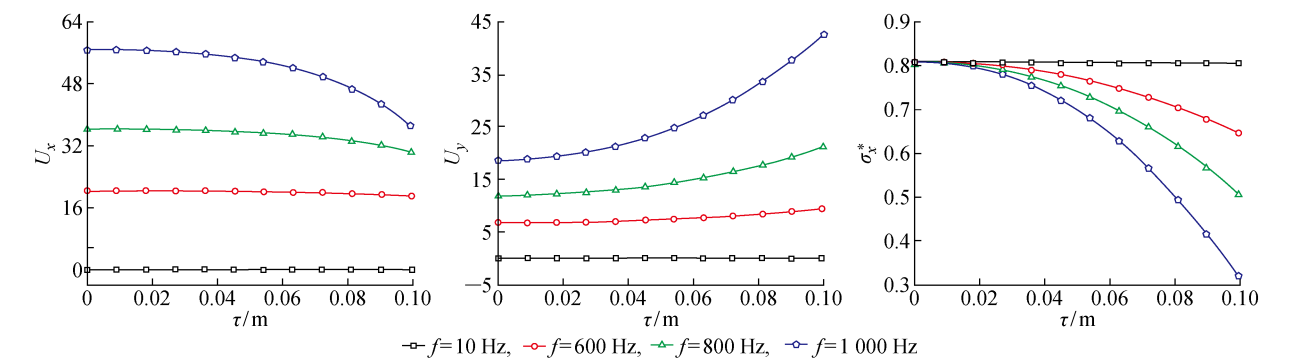


图 4 SV 波入射下地表位移及应力随非局部参数变化

Fig. 4 Displacement and stress of ground surface versus nonlocal parameter subjected to SV wave

力随非局部参数的增加几乎没有变化,而随着入射波频率的增加,非局部参数对地表位移及应力具有显著的影响.如当入射波频率达到 1 000 Hz,P 波入射情况下,地表位移随非局部参数出现增加而增大,应力随非局部参数增加而呈现出减小的趋势.SV 波入射情况下,地表水平位移及水平应力均随非局部参数的增加而减小,其竖向位移随非局部参数的增加而增大.其原因是非局部参数的增加,意味着饱和土中孔隙尺寸的增大,入射频率较低(如 10 Hz)时,波长远大于孔隙尺寸,此时孔隙尺寸对波传播的影响可以忽略,而随着入射波频率(如 1 000 Hz)的

增加,饱和土中波长减小,此时随着孔隙尺寸的增大,波长与孔隙尺寸更加接近,导致孔隙尺寸对波传播特性产生较大的影响.此外,从图 3 和 4 中还可以看出,随着入射波频率的增加,地表水平位移及竖向位移的起始值逐渐增大,这是由于入射波频率增加引起地表位移增大,而入射波频率对地表应力起始值影响不大.

图 5、6 分别为不同非局部参数时,P 波及 SV 波入射下,地表位移及应力随入射波频率变化曲线,其中 P 波及 SV 波入射角均为 30°.由图可知,当入射波频率较低时,本文理论计算结果与经典 Biot

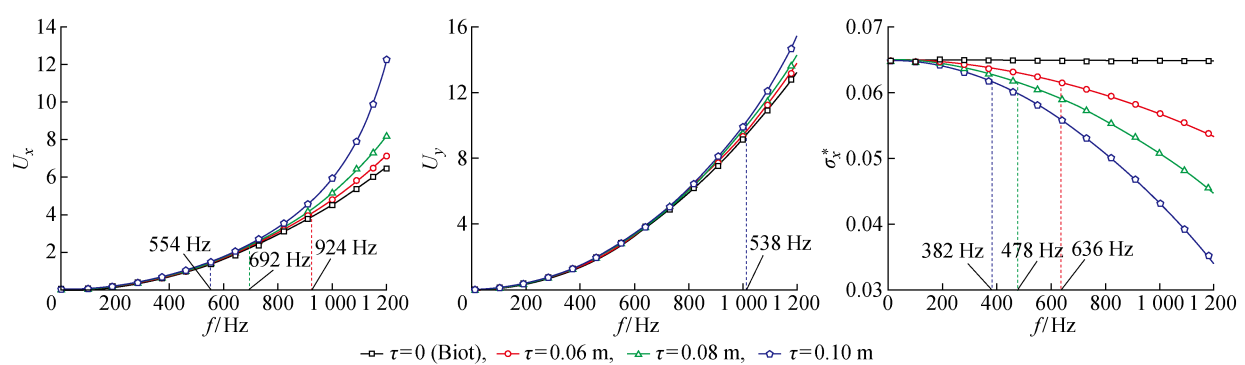


图 5 P 波入射下地表位移及应力随入射频率变化

Fig. 5 Displacement and stress of ground surface versus input frequency subjected to P wave

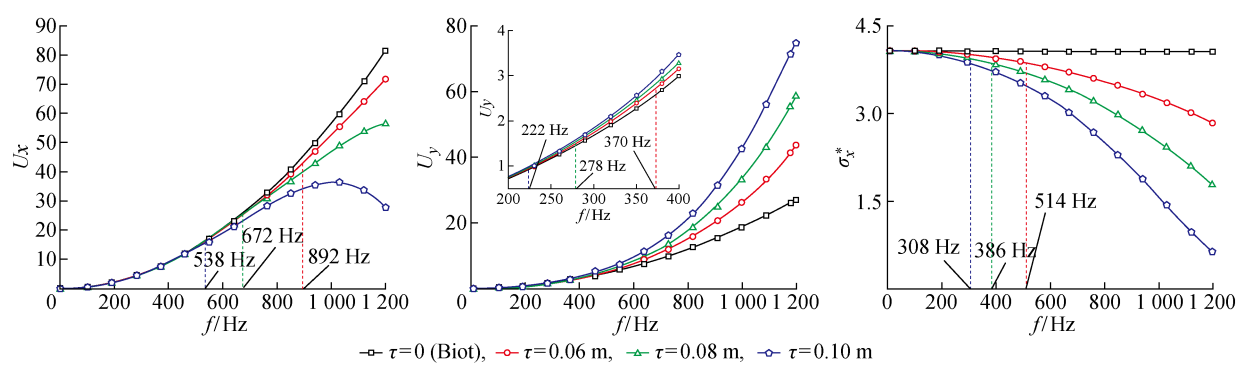


图 6 SV 波入射下地表位移及应力随入射频率变化

Fig. 6 Displacement and stress of ground surface versus input frequency subjected to SV wave

理论计算结果($\tau=0.00\text{ m}$)基本一致,而随着入射波频率的增加,本文理论计算结果与 Biot 理论计算结果逐渐显现出差异.由此说明,高频下孔隙尺寸对波传播特性的影响不可忽略.倘若以与经典 Biot 理论偏差达 5% 为分界点,由图可以看出,频率分界点(与 Biot 理论偏差达到 5% 的频率点)随非局部参数的增大而减小.如 SV 波入射下,地表水平位移在非局部参数为 0.06、0.08 及 0.10 m 时,所对应的临界频率分别为 892、672 及 538 Hz,其原因是非局部参

数越大,其对应的饱和土孔隙越大,从而导致其对波传播特性的影响越大.

图 7、8 分别为 P 波及 SV 波作用下,地表应力及位移随入射波入射角度的变化曲线,入射频率为 1 000 Hz.由图可知,P 波入射下,地表水平及竖向位移随非局部参数的增加而增大,而应力随非局部参数的增大而减小.SV 波入射时,地表水平位移及应力在入射角为 45° 时减小为 0,这是由于 SV 波在 45° 入射时,在地表发生全反射,此结论与经典弹性

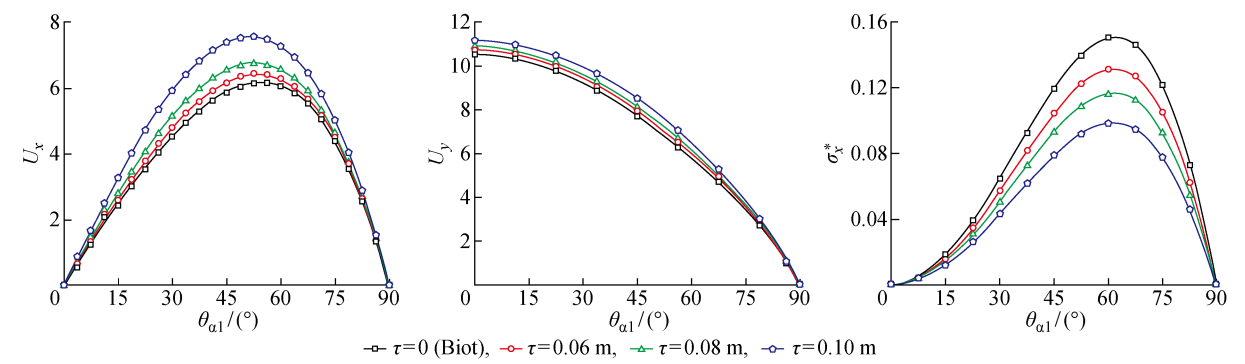


图 7 P 波入射下地表位移及应力随入射角变化曲线

Fig. 7 Displacement and stress of ground surface versus incident angle subjected to P wave

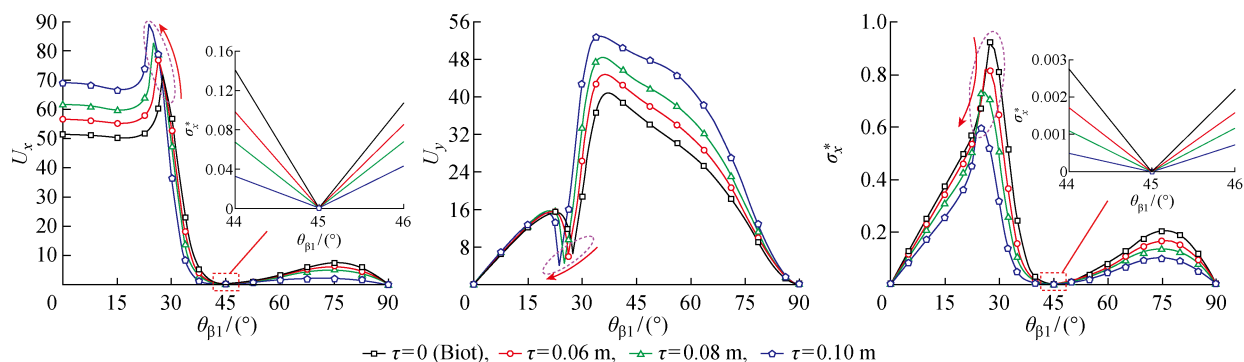


图8 SV波入射下地表位移及应力随入射角变化

Fig. 8 Displacement and stress of ground surface versus incident angle subjected to SV wave

解相同^[19]. 在 45° 之前水平位移随非局部参数增加呈现出增加的趋势, 在此之后随非局部参数的增加而呈现出减小趋势. 地表竖向位移随非局部参数增加而增大. 此外, 图中虚线内出现的拐点随非局部参数增大而向左移动, 这是由于非局部参数增加使得临界角度减小所致. 对比图 7、8 可知, 对于相同幅值的 P 波、SV 波作用下, SV 波所引起的地表响应大于 P 波.

6 结论

基于非局部-Biot 理论, 利用波函数展开法, 求解了 P 波和 SV 波作用下, 饱和土地基地表响应问题的解析解. 将本文解退化为经典 Biot 理论下无黏性解, 并与文献[3]对比, 结果一致. 通过算例分析研究了非局部参数、入射波频率及入射角对地表动力响应的影响, 得出如下结论:

(1) 非局部参数对地表动力响应的影响与入射波频率有关, 入射波频率较低(10 Hz)时, 本文解与经典 Biot 理论解基本一致, 随入射波频率增加(如 1 000 Hz), 非局部参数对地表影响的影响较为显著. 其原因是频率越高, 波长越小, 孔隙尺寸对波传播特性的影响越大.

(2) 入射波频率对地表响应的影响与非局部参数有关, 倘若以与经典 Biot 偏差 5% 为分界点, 可知非局部参数越大, 频率分界点越小.

(3) P 波入射时, 地表位移随非局部参数的增大而增大, 应力随非局部参数的增大而减小. SV 波入射时, 地表水平位移及应力在入射角为 45° 时, 其值为 0, 这是由于 SV 波在 45° 时发生全反射所致. 此外, 非局部参数通过减小 SV 波入射的临界角, 而使地表响应的拐点向左移动. 相同幅值的 P 波和 SV 波作用下, SV 波所引起的地表响应大于 P 波.

本文理论及研究成果可为半空间饱和土中波动

问题的研究提供借鉴.

参考文献:

- [1] 张奎, 李伟华, 赵成刚. 平面波入射下深水地基场地动力响应分析[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(6): 1066-1074.
ZHANG Kui, LI Weihua, ZHAO Chenggang. Dynamic responses of an underwater site subjected to plane P- or SV-wave incidence[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, 40(6): 1066-1074.
- [2] YANG J. Saturation effects on horizontal and vertical motions in a layered soil-bedrock system due to inclined SV waves[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2001, 21(6): 527-536.
- [3] LIN C H. Wave propagation in a poroelastic half-space saturated with inviscid fluid[D]. Los Angeles, America: University of Southern California, 2002.
- [4] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33(4): 1482-1498.
- [5] LOPATNIKOV S. Macroscopic Lagrangian formulation of poroelasticity with porosity dynamics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, 52(12): 2801-2839.
- [6] PAPARGYRI-BESKOU S, POLYZOS D, BESKOS D E. Wave propagation in 3-D poroelastic media including gradient effects[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2012, 82(10/11): 1569-1584.
- [7] PAPARGYRI-BESKOU S, TSINOPOULOS S V, BESKOS D E. Transient dynamic analysis of a fluid-saturated porous gradient elastic column[J]. *Acta Mechanica*, 2011, 222(3/4): 351-362.
- [8] SMYRLIS V D, PEGIOS I P, PAPARGYRI-BESKOU S. On wave propagation in gradient poroelasticity[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2016, 88: 72-75.

[9] BOUZIDI Y, SCHMITT D R. Measurement of the speed and attenuation of the Biot slow wave using a large ultrasonic transmitter[J]. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, 2009, 114(B8): 1-14.

[10] LEE K I, HUMPHREY V F, KIM B N, *et al.* Frequency dependencies of phase velocity and attenuation coefficient in a water-saturated sandy sediment from 0.3 to 1.0 MHz[J]. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 2007, 121(5): 2553-2558.

[11] CHAKRABORTY A. Prediction of negative dispersion by a nonlocal poroelastic theory[J]. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 2008, 123(1): 56-67.

[12] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. **Journal of Applied Physics**, 1983, 54(9): 4703-4710.

[13] TONG L H, YU Y, HU W T, *et al.* On wave propagation characteristics in fluid saturated porous materials by a nonlocal Biot theory[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2016, 379: 106-118.

[14] 徐长节, 丁海滨, 童立红, 等. 基于非局部 Biot 理论下饱和土中深埋圆柱形衬砌对平面弹性波的散射[J]. **岩土工程学报**, 2018, 40(9): 1563-1570.

XU Changjie, DING Haibin, TONG Lihong, *et al.* Scattering wave generated by the cylindrical lining in saturated soil based on the nonlocal-Biot theory[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(09): 1563-1570.

[15] XU C J, DING H B, TONG L H, *et al.* Scattering of a plane wave by shallow buried cylindrical lining in a poroelastic half-space[J]. **Applied Mathematical Modelling**, 2019, 70: 171-189.

[16] DING H B, TONG L H, XU C J, *et al.* Dynamic responses of shallow buried composite cylindrical lining embedded in saturated soil under incident P wave based on nonlocal-Biot theory[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2019, 121: 40-56.

[17] TONG L H, LAI S K, ZENG L L, *et al.* Nonlocal scale effect on Rayleigh wave propagation in porous fluid-saturated materials[J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2018, 148: 459-466.

[18] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range[J]. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 1956, 28(2): 179-191.

[19] KNOPOFF L, FREDRICKS R W, GANGI A F, *et al.* Surface amplitudes of reflected body waves[J]. **Geophysics**, 1957, 22(4): 842-847.

(本文编辑:陈晓燕)