

文章编号:1006-2467(2021)06-0672-09

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2020.031

基于复阻尼模型等效的黏性阻尼模型时域计算方法

孙攀旭¹, 杨红^{1,2}, 赵志明¹, 刘庆林³

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045; 2. 重庆大学 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045; 3. 深圳信息职业技术学院 交通与环境学院, 广东 深圳 518172)

摘要: 复阻尼模型的阻尼矩阵构造容易, 仅依赖于材料损耗因子和结构刚度矩阵, 但具有时域发散、非因果性等缺陷. 从结构的固有特征恒定出发, 推导了材料损耗因子与结构阻尼比的等效关系, 进而得到与复阻尼模型等效的黏性阻尼模型. 该阻尼模型不仅克服了复阻尼模型的缺陷, 同时保留了复阻尼模型直接依赖材料损耗因子的便捷性. 针对比例阻尼体系, 依据材料损耗因子和结构振型阻尼比的关系, 提出了基于复阻尼模型等效的黏性阻尼模型实振型叠加法. 针对非比例阻尼体系, 依据材料损耗因子和子结构振型阻尼比的关系, 借助分块 Rayleigh 阻尼和状态空间法, 提出了基于复阻尼模型等效的黏性阻尼模型复振型叠加法. 通过算例分析验证了本文方法的可行性和正确性.

关键词: 复阻尼; 黏性阻尼; 等效; 损耗因子; 振型阻尼比

中图分类号: TU 311.3

文献标志码: A

Time-Domain Calculation Method of an Equivalent Viscous Damping Model Based on Complex Damping Model

SUN Panxu¹, YANG Hong^{1,2}, ZHAO Zhiming¹, LIU Qinglin³

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China; 2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area of the Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China; 3. School of Traffic and Engineering, Shenzhen Institute of Information Technology, Shenzhen 518172, Guangdong, China)

Abstract: The damping matrix of the complex damping model is easy to be constructed, which only depends on the material loss factor and the structural stiffness matrix. However, the complex damping model has some shortcomings, such as time-domain divergence and causality. Structural inherent characteristics are constant, so that the equivalent relationship between material loss factor and structural damping ratio is deduced and the viscous damping model which is equivalent to complex damping model is obtained. The proposed damping model overcomes the shortcoming of the complex damping model. Besides, the convenience that the complex damping model is directly dependent on material loss factor is retained. According to the equivalent relationship between the material loss factor and structural modal damping ratio, the real mode superposition method based on the proposed damping model is suggested for the proportional damping system. For the non-proportional damping system, according to the equivalent

收稿日期:2020-01-27

基金项目:国家自然科学基金项目(51578343), 重庆市研究生科研创新项目(CYB18036)

作者简介:孙攀旭(1990-), 男, 河南省许昌市人, 博士生, 从事结构抗震设计与计算.

通信作者:杨红, 男, 教授, 博士生导师, 电话(Tel.): 13452348727; E-mail: yangh@cqu.edu.cn.

relationship between the material loss factor and modal damping ratio of the substructure, the complex mode superposition method based on the proposed damping model is proposed by the aid of Rayleigh damping and the state space method. The example analysis proves the feasibility and correctness of the proposed method.

Key words: complex damping; viscous damping; equivalent; loss factor; modal damping ratio

目前,最常用的阻尼模型是黏性阻尼模型和复阻尼模型^[1].黏性阻尼模型具有数学简易性、物理上满足因果性等优点^[2],但黏性阻尼模型的计算依赖于结构振型阻尼比,结构振型阻尼比通常需要由试验测定,过程较为复杂^[3].复阻尼模型直接依赖于材料的阻尼特性,不需要进行振型阻尼比的测定^[4],但具有时域发散^[5]及非因果性^[6]等缺陷.因此,寻找两种阻尼模型之间的等效关系,构建一种等效于复阻尼模型的黏性阻尼模型具有重要意义.

为构建等效复阻尼模型,Yang 等^[7]依据线弹性体的时域本构关系,采用最小二乘法使其近似等于频域内的复阻尼本构关系.Reggio 等^[8]采用 Maxwell-Wiechert 本构模型,在频域范围内近似等效于复阻尼本构模型.Wang^[9]在频域内采用 Rayleigh 阻尼矩阵等效复阻尼矩阵.李瞰等^[10]基于谱矩相等原则构建出一种等效复阻尼模型,但上述方法的计算过程较为复杂.文献[3,11-12]依据复阻尼模型和黏性阻尼模型的自由振动响应,构建出损耗因子和阻尼比的近似 2 倍关系.在此基础上,本文以基于复阻尼模型的频率相关黏性阻尼模型^[13-14]为依据,从结构固有特征恒定的角度出发,构建了材料损耗因子与结构阻尼比的更合理等效关系,进而建立了与复阻尼模型等效的黏性阻尼模型(以下简称“复阻尼等效-黏性阻尼模型”).

对于单一阻尼特性材料组成的黏性阻尼体系,阻尼矩阵满足经典阻尼条件,可直接采用实振型叠加法进行计算^[15].在具体结构分析中,采用振型阻尼比构造阻尼矩阵更为直观方便^[16].本文利用材料损耗因子与结构振型阻尼比的等效关系,建立了复阻尼等效-黏性阻尼模型的实振型叠加法.

对于不同阻尼特性材料组成的黏性阻尼体系,阻尼矩阵为非比例阻尼矩阵,实振型叠加法将不再适用.针对非比例阻尼体系,Clough 等^[15]提出可以通过构造不同阻尼比的子结构,由分块 Rayleigh 阻尼矩阵叠加得到非比例阻尼矩阵.在此基础上,进一步利用状态空间法实现非比例阻尼体系的复振型叠加法^[17-19].但分块 Rayleigh 阻尼矩阵的构造依赖于子结构的振型阻尼比,子结构振型阻尼比的确定是

困难的.为解决该问题,本文基于新提出的更合理的材料损耗因子与对应子结构振型阻尼比的等效关系,建立了复阻尼等效-黏性阻尼模型的复振型叠加法.

1 损耗因子与阻尼比的等效关系

1.1 复阻尼模型与黏性阻尼模型等效

基于复阻尼模型的单自由度体系时域运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + i\eta kx(t) = f + if' \tag{1}$$

式中: m 为结构的质量; t 为时间; k 为结构的刚度; η 为材料损耗因子; f 为外激励荷载; f' 为 f 的复化对偶项^[20]; $x(t)$ 为结构的位移; $\ddot{x}(t)$ 为结构的加速度; i 为虚数单位,即 $i=\sqrt{-1}$.

式(1)对应的自由振动方程为

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + i\eta \omega^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

式中: ω 为结构的自振频率, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

求解式(2),剔除发散项^[21],可得到对应的自由振动响应为

$$x(t) = e^{-\lambda_H t} (A_1 \sin \omega_H t + A_2 \cos \omega_H t) \tag{3}$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_H &= \frac{\sqrt{2} \eta \omega^2}{2 \sqrt{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \eta^2 \omega^4}}} \\ \omega_H &= \sqrt{\frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\omega^4 + \eta^2 \omega^4}} \\ A_1 &= \frac{\dot{x}(t_0) + \lambda_H x(t_0)}{\omega_H} \\ A_2 &= x(t_0) \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

ω_H 为结构的有阻尼自振频率; λ_H 为自由振动的衰减系数; A_1 和 A_2 为待定系数,可由初值条件确定; t_0 为初始时刻; $x(t_0)$ 为初始位移; $\dot{x}(t_0)$ 为初始速度.

基于黏性阻尼模型的单自由度体系时域运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \frac{2\xi k}{\omega} \dot{x}(t) = f \tag{5}$$

式中: ξ 为结构的阻尼比; $\dot{x}(t)$ 为结构的速度.

式(5)对应的自由振动方程为

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) = 0 \quad (6)$$

求解式(6)可得

$$x(t) = e^{-\lambda_V t} (C_1 \sin \omega_V t + C_2 \cos \omega_V t) \quad (7)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_V &= \xi\omega \\ \omega_V &= \omega \sqrt{1 - \xi^2} \\ C_1 &= \frac{\dot{x}(t_0) + \lambda_V x(t_0)}{\omega_V} \\ C_2 &= x(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ω_V 为结构的有阻尼自振频率; λ_V 为自由振动的衰减系数; C_1 和 C_2 为待定系数, 可由初值条件确定。

为构建阻尼比与损耗因子的等效关系, 依据结构的固有特征恒定, 将复阻尼模型与黏性阻尼模型的自由振动响应等效^[3,11-12], 自由振动响应的等效不仅包括衰减系数的等效, 还包括有阻尼自由振动频率的等效, 即

$$\lambda_V = \lambda_H \quad (9)$$

$$\omega_V = \omega_H \quad (10)$$

进一步得

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{1 + \eta^2} - 1} \quad (11)$$

$$\sqrt{1 - \xi^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \eta^2}} \quad (12)$$

式(11)和(12)无法同时成立, 表明复阻尼模型与黏性阻尼模型的自由振动响应是无法直接等效的。究其原因, 复阻尼模型的自由振动解需要舍弃发散解, 在数学上是非完整解, 对应的有阻尼自振频率和衰减系数均随着损耗因子的增大而增大。而黏性阻尼模型的有阻尼自振频率随着阻尼比的增大而减小, 衰减系数随着阻尼比的增大而增大。因此, 理论上复阻尼模型和黏性阻尼模型的自由振动响应是不能等效的。

1.2 频率相关黏性阻尼模型与黏性阻尼模型等效

为克服复阻尼模型的时域发散缺陷, 依据时频域转换原则可得到基于复阻尼模型的频率相关黏性阻尼模型^[13-14], 对应的时域运动方程为

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + \frac{\eta\omega^2}{\omega} \dot{x}(t) = f \quad (13)$$

式中: ω 为结构的振动频率。

式(13)对应的自由振动方程为

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + \frac{\eta\omega^2}{\omega} \dot{x}(t) = 0 \quad (14)$$

求解式(14)可得

$$x(t) = e^{-\lambda_F t} (B_1 \sin \omega_F t + B_2 \cos \omega_F t) \quad (15)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_F &= \frac{\sqrt{2}\eta\omega^2}{2\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 - \eta^2\omega^4}}} \\ \omega_F &= \sqrt{\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\omega^4 - \eta^2\omega^4}} \\ B_1 &= \frac{\dot{x}(t_0) + \lambda_F x(t_0)}{\omega_F} \\ B_2 &= x(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ω_F 为结构的有阻尼自振频率; λ_F 为自由振动的衰减系数; B_1 和 B_2 为待定系数, 可由初值条件确定。

频率相关黏性阻尼模型与黏性阻尼模型等效, 可得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_V &= \lambda_F \\ \omega_V &= \omega_F \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(17)可转化为

$$\xi\omega = \frac{\sqrt{2}\eta\omega^2}{2\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 - \eta^2\omega^4}}} \quad (18)$$

$$\omega \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\omega^4 - \eta^2\omega^4}} \quad (19)$$

式(18)和(19)是相同的, 可得到结构阻尼比与材料损耗因子之间的关系式为

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \eta^2}} \quad (20)$$

综上, 频率相关黏性阻尼模型与黏性阻尼模型的自由振动响应是可以直接等效的, 据此建立的材料损耗因子与结构阻尼比的等效关系具有更合理的物理意义。

将式(20)代入式(6), 将结构有阻尼自振频率代入式(14), 此时, 式(6)和(14)具有相同的数学表达式, 即

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \frac{\sqrt{2}k}{\omega} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \eta^2}} \dot{x}(t) = 0 \quad (21)$$

式(21)为复阻尼等效-黏性阻尼模型的时域自由振动方程。

基于构建的材料损耗因子与结构阻尼比的等效关系, 频率相关黏性阻尼模型和黏性阻尼模型具有相同的自由振动方程, 从而保证了结构的自由振动响应和自由振动耗散能量是相同的。

频率相关黏性阻尼模型克服了复阻尼模型的时域发散缺陷, 但与复阻尼模型的频响函数相同, 仍具有物理上非因果性的缺陷, 同时阻尼项中包含结构振动频率的未知项, 计算过程较为复杂。新建立的复阻尼等效-黏性阻尼模型可克服复阻尼模型时域发

散、非因果性的缺陷,同时保留了复阻尼模型直接依赖材料损耗因子的便捷性和黏性阻尼模型的数学简易性,且材料损耗因子与结构阻尼比的等效关系也更合理。

损耗因子较小时,可作如下近似

$$\sqrt{1-\eta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\eta^2 \tag{22}$$

式(20)可进一步近似为

$$\xi \approx \frac{1}{2}\eta \tag{23}$$

式(23)表明,当损耗因子较小时,损耗因子与阻尼比是近似的 2 倍关系,与文献[3,11-12,22-23]中小阻尼比情况下损耗因子与阻尼比的关系是一致的。

在此基础上,对损耗因子近似为 2 倍阻尼比的适用范围进行分析,相对误差可表示为

$$\epsilon = \left| \frac{\eta - 2\xi}{\eta} \right| \tag{24}$$

以 5% 的相对误差作为界定依据,式(24)可进一步转化为

$$\left| \frac{\eta - \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \eta^2}}}{\eta} \right| \leq 5\% \tag{25}$$

求解式(25),可得

$$\eta \leq 0.5808 \tag{26}$$

综上,当 $\eta \leq 0.5808$ 时,损耗因子和 2 倍阻尼比的相对误差小于 5%,可近似认为损耗因子与阻尼比服从 2 倍关系。

2 单一阻尼特性材料组成的比例阻尼体系

基于黏性阻尼模型的多自由度体系运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{I}g(t) \tag{27}$$

式中: \mathbf{M} 为结构的质量矩阵; \mathbf{K} 为结构的刚度矩阵; \mathbf{C} 为结构的阻尼矩阵; \mathbf{I} 为与外激励加速度输入有关的向量,与 $g(t)$ 方向相同的位移自由度元素为 1; $g(t)$ 为外激励加速度; $\mathbf{x}(t)$ 为结构的位移向量; $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 为结构的速度向量; $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ 为结构的加速度向量。

式(27)对应的无阻尼振型向量

$$\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi}_N] \tag{28}$$

$\mathbf{x}(t)$ 可由振型向量线性表达:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t) \boldsymbol{\varphi}_n \tag{29}$$

单一阻尼特性材料的比例阻尼体系可直接采用实振型叠加法,将式(29)代入式(27),可得

$$\ddot{x}_n(t) + \omega_n^2 x_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{x}_n(t) = -\gamma_n g(t) \tag{30}$$

$n = 1, 2, \cdots, N$

式中: ξ_n 为第 n 阶振型对应的振型阻尼比; ω_n 为第 n 阶振型对应的无阻尼自振频率; γ_n 为第 n 阶振型对应的振型参与系数,满足

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n}} \\ \gamma_n &= \frac{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{I}}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n} \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

材料的损耗因子在一宽泛的频率范围内是近似不变的^[4],因此单一材料结构的振型阻尼比在一宽泛频率范围内是近似不变的.通过试验可直接测得材料的损耗因子,进一步由式(20)可得到振型阻尼比为

$$\xi_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \eta^2}} \tag{32}$$

将式(32)代入式(30),可得到 $x_n(t)$.由式(29)可得到 $\mathbf{x}(t)$,进而完成了式(27)的求解,即实现了复阻尼等效-黏性阻尼模型的实振型叠加法,可方便地计算由单一阻尼特性材料组成的比例阻尼体系的动力响应。

3 不同阻尼特性材料组成的非比例阻尼体系

对于混合结构而言,无法直接利用材料损耗因子得到整体结构的振型阻尼比.只能依赖于材料损耗因子得到相应子结构对应的振型阻尼比.由式(20)可得

$$\xi_{j,n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \eta_j^2}} \tag{33}$$

式中: $\xi_{j,n}$ 为第 j 种材料对应子结构第 n 阶振型的振型阻尼比; η_j 为第 j 种材料的损耗因子。

依据子结构的振型阻尼比,需要进一步依赖于 Rayleigh 阻尼模型,采用分块 Rayleigh 阻尼模型构建结构的阻尼矩阵

$$\mathbf{C} = \sum_{j=1}^S \alpha_j \mathbf{M}_j + \beta_j \mathbf{K}_j \tag{34}$$

式中: S 为材料的种类数目; \mathbf{M}_j 为第 j 种材料对应的子结构质量矩阵; \mathbf{K}_j 为第 j 种材料对应的子结构刚度矩阵; α_j 和 β_j 为对应的 Rayleigh 阻尼系数。

选择结构的两阶重要振型,式(34)可进一步转化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_j}{2\omega_m} + \frac{\beta_j \omega_m}{2} &= 2\xi_{j,m} \\ \frac{\alpha_j}{2\omega_n} + \frac{\beta_j \omega_n}{2} &= 2\xi_{j,n} \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

式中: ω_m 为第 m 阶振型的无阻尼自振频率; $\xi_{j,m}$ 、 $\xi_{j,n}$ 第 j 种材料对应子结构第 m 阶、第 n 阶振型的振型

阻尼比。

求解式(35),可得到 Rayleigh 阻尼系数,进而得到结构的阻尼矩阵,但通常情况下,结构的阻尼矩阵是非比例的,无法直接采用实振型叠加法。结构运动方程可等价为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}g(t) \\ \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{0} \end{cases} \quad (36)$$

式(36)可进一步表示为

$$\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{y}}(t) + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{F} \quad (37)$$

式中:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{M} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}g(t) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

式(37)对应的复特征值为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= -\sigma_i + \mathrm{i}\omega_{\mathrm{di}} \\ \lambda_i^* &= -\sigma_i - \mathrm{i}\omega_{\mathrm{di}} \\ i &= 1, 2, \cdots, N \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

式中: σ_i 为第 i 阶振型的衰减系数; ω_{di} 为第 i 阶振型的有阻尼自振频率。

对应于 $2N$ 个复特征值的复特征向量为

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i & \boldsymbol{\phi}_i^* \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i & \lambda_i^* \boldsymbol{\phi}_i^* \end{bmatrix} \quad (39)$$

式中: $\boldsymbol{\phi}_i$ 为 N 维复向量, $\boldsymbol{\phi}_i^*$ 为 $\boldsymbol{\phi}_i$ 的共轭向量。

令

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \frac{\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{R}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_i}{\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{R}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i} \\ 2\xi_i \omega_i &= \frac{\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{R}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\phi}_i}{\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{R}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

式中: $\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{R}}$ 为 $\boldsymbol{\phi}_i$ 的共轭转置向量。

由式(38)、(40)可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \xi_i \omega_i \\ \omega_{\mathrm{di}} &= \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

位移向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 可由复特征向量线性表示

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^N [\boldsymbol{\phi}_i y_i(t) + \boldsymbol{\phi}_i^* y_i^*(t)] \quad (42)$$

利用复特征向量的正交性,可得

$$\dot{y}_i(t) - \lambda_i y_i(t) = -\delta_i g(t) \quad (43)$$

$$\delta_i = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{I}}{\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\phi}_i + 2\lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i} \quad (44)$$

求解式(43),可得到 $y_i(t)$ 。将 $y_i(t)$ 和 $y_i^*(t)$ 代入式(42),得到 $\boldsymbol{x}(t)$,即实现了复阻尼等效-黏性阻尼模型的复振型叠加法,可计算由不同阻尼特性材

料组成的非比例阻尼体系的动力响应。

4 算例分析

4.1 算例 1

如图 1 所示,以 4 自由度体系为例,其具体参数取值见表 1,各楼层的材料阻尼特性相同,从而构建了由单一阻尼特性材料组成的算例模型 A,材料的损耗因子为 0.60。模型 A 的初始状态为静止状态,分别采用基于复阻尼模型的频域计算方法(FFZ)和本文提出的复阻尼等效-黏性阻尼模型实振型叠加法(EVR)计算 El Centro 波和 Taft 波作用下模型 A 的动力响应,结果如图 2、3 所示。图中: t 为时间, d 为位移, a 为加速度。其中,基于复阻尼模型的频域计算方法剔除了方程中的发散项,计算结果可视为精确解^[24]。不同方法计算的模型 A 顶层动力响应峰值对比如表 2 所示。



图 1 模型 A 示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Model A

表 1 模型 A 参数

Tab. 1 Parameters of Model A

层数	质量 $\times 10^{-3} / \text{kg}$	刚度 $\times 10^{-5} / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$
1	5.0	3.0
2	4.0	2.5
3	3.0	2.0
4	2.0	1.5

El Centro 波作用下,EVR 和 FFZ 的位移时程响应近似相等,均在 $t=3.48 \text{ s}$ 达到位移峰值(图 2(a)),位移峰值的相对误差为 8.55%。EVR 和 FFZ 的加速度时程响应近似相等,EVR 在 $t=11.96 \text{ s}$ 处达到加速度峰值,FFZ 在 $t=12.00 \text{ s}$ 处达到加速度峰值(图 2(b)),加速度峰值的相对误差为 9.46%。Taft 波作用下,EVR 和 FFZ 的位移时程响应近似相等,EVR 在 $t=4.22 \text{ s}$ 处达到位移峰值,FFZ 在 $t=4.24 \text{ s}$ 处达到位移峰值(图 3(a)),位移峰值的相对误差为 3.44%。EVR 和 FFZ 的加速度时程响应近似相等,均在 $t=4.22 \text{ s}$ 处达到加速度峰值(图 3

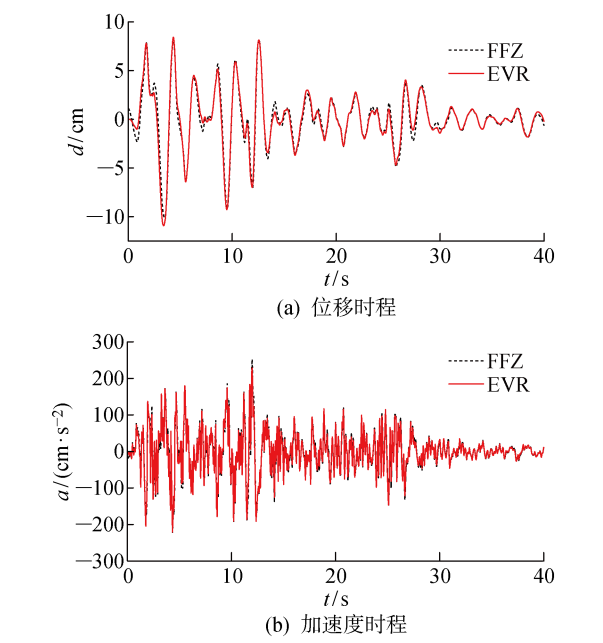


图 2 El Centro 波作用下模型 A 顶层响应
Fig. 2 Top floor responses of Model A in El Centro wave

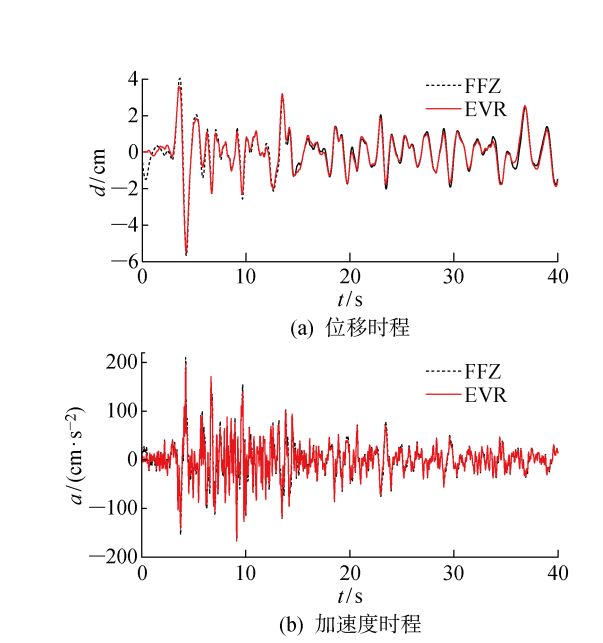


图 3 Taft 波作用下模型 A 顶层响应
Fig. 3 Top floor responses of Model A in Taft wave

表 2 模型 A 动力响应
Tab. 2 Dynamic responses of Model A

参数	El Centro 波		Taft 波	
	FFZ ^[24]	EVR	FFZ ^[24]	EVR
位移峰值时间/s	3.48	3.48	4.24	4.22
位移峰值/cm	10.056 7	10.917 0	5.676 9	5.481 4
峰值相对误差/%	—	8.55	—	3.44
加速度峰值时间/s	12.00	11.96	4.22	4.22
加速度峰值/(cm·s ⁻²)	252.042 8	228.194 3	209.732 4	197.108 7
峰值相对误差/%	—	9.46	—	6.02

(b)),加速度峰值的相对误差为 6.02%,因此,EVR 和 FFZ 的计算结果近似相等,证明了等效于复阻尼模型的黏性阻尼模型实振型叠加法的正确性。

4.2 算例 2

如图 4 所示,以 2 自由度体系为例,其具体参数取值见表 3。第 1 层和第 2 层选择不同阻尼特性的材料,进而构建由不同阻尼特性材料组成的模型 B,

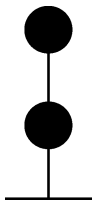


图 4 模型 B 示意图
Fig. 4 Schematic diagram of Model B

表 3 模型 B 参数
Tab. 3 Parameters of Model B

层数	质量 $\times 10^{-3}/\text{kg}$	刚度 $\times 10^{-5}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$
1	3.0	2.0
2	2.0	1.5

其中,第 1 层、第 2 层材料的损耗因子分别为 0.70、0.40。

依据第一阶振型和第二阶振型,可得到模型 B 对应的分块 Rayleigh 阻尼矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.652\ 5 & -0.335\ 8 \\ -0.335\ 8 & 2.043\ 3 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (46)$$

模型 B 的初始状态为静止状态,分别采用 FFZ 和本文提出的复阻尼等效-黏性阻尼模型复振型叠加法(EVC)计算 El Centro 波和 Taft 波作用下模型

B 的动力响应,结果如图 5、6 所示. 不同方法计算的模型 B 顶层动力响应峰值对比如表 4 所示.

El Centro 波作用下,EVC 和 FFZ 的位移时程响应近似相等,EVC 在 $t=12.30\text{ s}$ 处达到位移峰值,FFZ 在 $t=12.32\text{ s}$ 处达到位移峰值(图 5(a)),位移峰值的相对误差为 3.82%. EVC 和 FFZ 的加速度时程响应近似相等,均在 $t=11.76\text{ s}$ 达到加速度峰值(图 5(b)),加速度峰值的相对误差为

8.54%. Taft 波作用下,EVC 和 FFZ 的位移时程响应近似相等,EVC 在 $t=4.02\text{ s}$ 处达到位移峰值,FFZ 在 $t=4.04\text{ s}$ 处达到位移峰值(图 6(a)),位移峰值的相对误差为 4.15%. EVC 和 FFZ 的加速度时程响应近似相等,均在 $t=9.84\text{ s}$ 处达到加速度峰值(图 6(b)),加速度峰值的相对误差为 9.68%. 因此,EVC 和 FFZ 的计算结果近似相等,证明了复阻尼等效-黏性阻尼模型复振型叠加法的正确性.

表 4 模型 B 动力响应
Tab. 4 Dynamic responses of Model B

参数	El Centro 波		Taft 波	
	FFZ ^[24]	EVC	FFZ ^[24]	EVC
位移峰值时间/s	12.32	12.30	4.04	4.02
位移峰值/cm	5.374 2	5.579 7	3.066 4	3.193 8
峰值相对误差/%	—	3.82	—	4.15
加速度峰值时间/s	11.76	11.76	9.84	9.84
加速度峰值/(cm·s ⁻²)	351.114 8	321.124 5	217.156 0	196.136 0
峰值相对误差/%	—	8.54	—	9.68

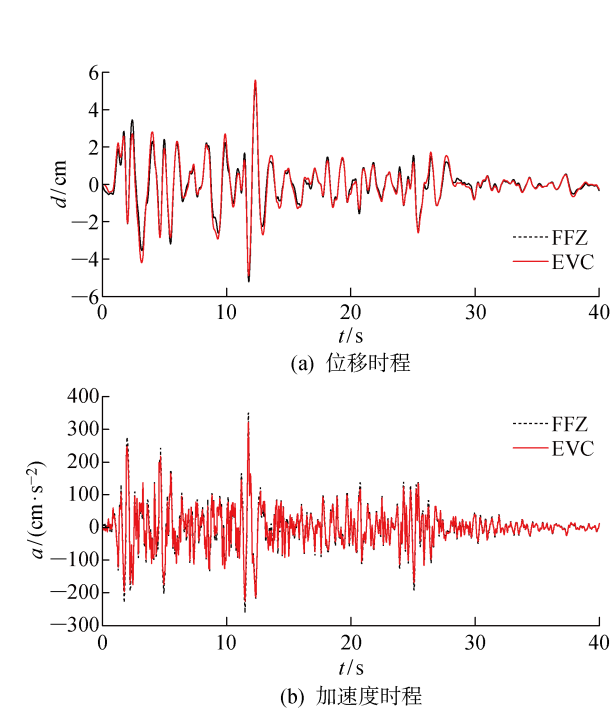


图 5 El Centro 地震波作用下模型 B 顶层响应
Fig. 5 Top floor responses of Model B in El Centro wave

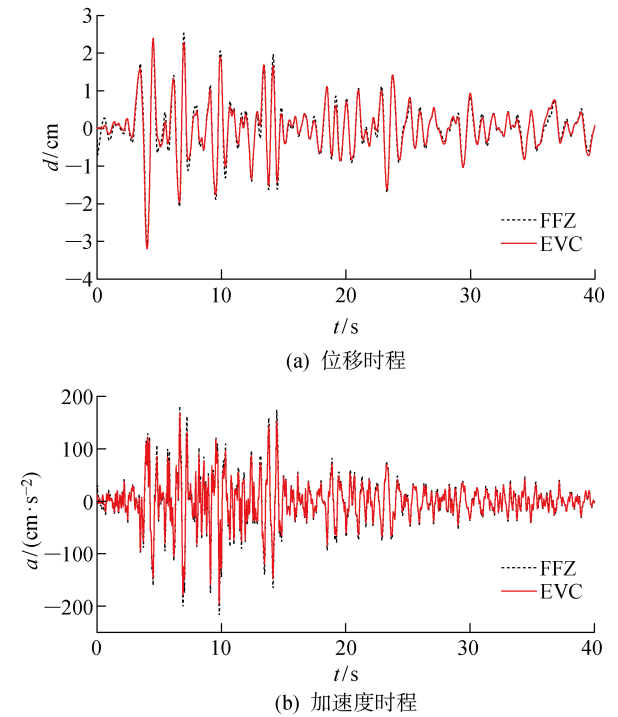


图 6 Taft 地震波作用下模型 B 顶层响应
Fig. 6 Top floor responses of Model B in Taft wave

5 结论

(1) 从结构固有特征恒定的角度出发,基于复阻尼模型的频率相关黏性阻尼模型,建立了材料损耗因子与结构振型阻尼比的合理等效关系.

(2) 依据材料损耗因子与结构振型阻尼比的等效关系,提出了与复阻尼模型等效的黏性阻尼模型,可克服复阻尼模型时域发散、非因果性的缺陷,同时保留了复阻尼模型直接依赖材料损耗因子的便捷性以及黏性阻尼模型的数学简易性.

(3) 对于由单一阻尼特性材料组成的比例阻尼体系,利用材料损耗因子与结构振型阻尼比相等的特征,建立了与复阻尼模型等效的黏性阻尼模型实振型叠加法。对于由不同阻尼特性材料组成的非比例阻尼体系,利用不同材料的损耗因子与对应子结构的振型阻尼比相等特征,提出了与复阻尼模型等效的黏性阻尼模型复振型叠加法,算例分析验证了两种方法的正确性。

参考文献:

- [1] 吴泽玉,王东炜,李玉河. 复阻尼结构动力方程的增维精细积分法[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(2): 107-110.
WU Zeyu, WANG Dongwei, LI Yuhe. Magnified dimension precise integration method for the dynamic equations of complex damped structures[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(2): 107-110.
- [2] 张辉东,王元丰. 空间网壳结构的节点-构件阻尼模型研究[J]. *土木工程学报*, 2015, 48(2): 54-62.
ZHANG Huidong, WANG Yuanfeng. Investigation of a joint-member damping model for single-layer latticed domes[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2015, 48(2): 54-62.
- [3] 曹树谦,张文德,萧龙翔. 振动结构模态分析: 理论、实验与应用[M]. 天津: 天津大学出版社, 2001.
CAO Shuqian, ZHANG Wende, XIAO Longxiang. Modal analysis of vibrational structure: Theory, experiment and application[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2001.
- [4] BERT C W. Material damping: An introductory review of mathematic measures and experimental technique[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 29(2): 129-153.
- [5] 朱敏,朱镜清. 逐步积分法求解复阻尼结构运动方程的稳定性问题[J]. *地震工程与工程振动*, 2001, 21(4): 59-62.
ZHU Min, ZHU Jingqing. Studies on stability of step-by-step methods under complex damping conditions[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2001, 21(4): 59-62.
- [6] NAKAMURA N. Practical causal hysteretic damping [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2007, 36(5): 597-617.
- [7] YANG F Y, ZHI X D, FAN F. Effect of complex damping on seismic responses of a reticulated dome and shaking table test validation [J]. *Thin-Walled Structures*, 2019, 134: 407-418.
- [8] REGGIO A, ANGELIS M. Modelling and identification of structures with rate-independent linear damping[J]. *Meccanica*, 2015, 50(3): 617-632.
- [9] WANG J. Rayleigh coefficients for series infrastructure systems with multiple damping properties[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21(6): 1234-1248.
- [10] 李瞰,谢海文,李创第,等. 基于谱矩的单自由度复阻尼结构的等效阻尼分析[J]. *广西科技大学学报*, 2019, 30(4): 6-14.
LI Tun, XIE Haiwen, LI Chuangdi, *et al.* Equivalent damping of single-degree-of-freedom complex damping structures based on spectral moment [J]. *Journal of Guangxi University of Science and Technology*, 2019, 30(4): 6-14.
- [11] 梁超锋. 混凝土材料与结构阻尼测试、增强与表达 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2005.
LIANG Chaofeng. Concrete material and structural damping test, enhancement and expression[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2005.
- [12] 梁超锋,欧进萍. 结构阻尼与材料阻尼的关系[J]. *地震工程与工程振动*, 2006, 26(1): 49-55.
LIANG Chaofeng, OU Jinping. Relationship between structural damping and material damping[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2006, 26(1): 49-55.
- [13] 孙攀旭,杨红,吴加峰,等. 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法[J]. *力学学报*, 2018, 50(5): 1185-1197.
SUN Panxu, YANG Hong, WU Jiafeng, *et al.* Complex mode superposition method based on frequency dependent viscous damping model[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1185-1197.
- [14] 孙攀旭,杨红,刘庆林. 基于复阻尼模型的改进时域计算方法[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2019, 46(11): 122-130.
SUN Panxu, YANG Hong, LIU Qinglin. Improved time domain calculation method based on complex damping model [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2019, 46(11): 122-130.
- [15] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures [M]. 3rd ed. Berkeley, California: Computer and Structures, Inc, 2003.
- [16] 欧进萍,王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
OU Jinping, WANG Guangyuan. Random vibration of structures[M]. Beijing: Higher Education Press, 1998.
- [17] 陈华霆,谭平,彭凌云,等. 基于隔震结构 Bench-

- mark 模型的复振型叠加反应谱方法[J]. **振动与冲击**, 2017, 36(23): 157-163.
- CHEN Huating, TAN Ping, PENG Lingyun, *et al.* Complex modal shapes superposition response spectrum approach based on vibration isolation structure benchmark model [J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2017, 36(23): 157-163.
- [18] 陈华霆, 谭平, 彭凌云, 等. 复振型叠加方法合理振型数量的确定[J]. **建筑结构学报**, 2020, 41(2): 157-165.
- CHEN Huating, TAN Ping, PENG Lingyun, *et al.* Determination of reasonable mode number for complex modal superposition approach [J]. **Journal of Building Structures**, 2020, 41(2): 157-165.
- [19] DE DOMENICO D, RICCIARDI G. Dynamic response of non-classically damped structures via reduced-order complex modal analysis: Two novel truncation measures[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2019, 452: 169-190.
- [20] 何钟怡. 复本构理论中的对偶原则[J]. **固体力学学报**, 1994, 15(2): 177-180.
- HE Zhongyi. The dual principle in theory of complex constitutive equations[J]. **Acta Mechanica Solida Sinica**, 1994, 15(2): 177-180.
- [21] 朱镜清. 关于复阻尼理论的两个基本问题[J]. **固体力学学报**, 1992, 13(2): 113-118.
- ZHU Jingqing. On the two basic problems of complex damping theory[J]. **Acta Mechanica Solida Sinica**, 1992, 13(2): 113-118.
- [22] 廖振鹏. 工程波动理论导论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- LIAO Zhenpeng. Introduction to wave motion theories in engineering [M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [23] LAGE Y, CACHÃO H, REIS L, *et al.* A damage parameter for HCF and VHCF based on hysteretic damping[J]. **International Journal of Fatigue**, 2014, 62: 2-9.
- [24] 潘玉华, 王元丰. 复阻尼结构动力方程的高斯精细时程积分法[J]. **工程力学**, 2012, 29(2): 16-20.
- PAN Yuhua, WANG Yuanfeng. Gauss precise time-integration of complex damping vibration systems[J]. **Engineering Mechanics**, 2012, 29(2): 16-20.

(本文编辑:陈晓燕)