

文章编号:1006-2467(2020)09-0881-09

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2020.99.014

# 基于变分贝叶斯理论的不确定厚尾噪声滤波方法

董祥祥, 吕润妍, 蔡云泽

(上海交通大学 自动化系; 系统控制与信息处理教育部重点实验室;  
海洋智能装备与系统集成技术教育部实验室, 上海 200240)

**摘要:** 为了解决非线性滤波中量测噪声呈厚尾分布且统计特性不确定的问题,提出一种基于 Pearson Type VII 分布的自适应滤波算法. 针对传统鲁棒卡尔曼滤波器因尺度矩阵和自由度参数固定不变而无法自适应调整的问题,以容积卡尔曼滤波器为基础,选择 Pearson Type VII 分布对厚尾噪声进行建模,将传统鲁棒滤波固定自由度参数的估计转化为 Pearson Type VII 分布中可自适应调整的双自由度参数的估计,并通过 inverse Wishart 和 Gamma 分布描述尺度矩阵、双自由度参数和辅助参数的先验分布,利用遗忘因子对各参数进行时间更新;基于变分贝叶斯理论,对系统状态、尺度矩阵、双自由度参数和辅助参数形成的联合后验概率密度函数进行变分迭代,实现对系统状态和未知厚尾噪声的联合估计. 仿真结果表明,在不确定厚尾噪声条件下,本文算法的滤波精度高于传统鲁棒容积卡尔曼滤波.

**关键词:** 厚尾噪声; Pearson Type VII 分布; 变分贝叶斯; 联合估计; 容积卡尔曼滤波

**中图分类号:** TP 13

**文献标志码:** A

## A Variational Bayes-Based Filter with Uncertain Heavy-Tailed Noise

DONG Xiangxiang, LÜ Runyan, CAI Yunze

(Department of Automation; Key Laboratory of System Control and Information Processing of the Ministry of Education; c. Key Laboratory of Marine Intelligent Equipment and System of the Ministry of Education; Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** An adaptive Pearson Type VII based filter was proposed to deal with measurement noise with heavy tailed distribution and uncertain statistical characteristics in nonlinear filtering. In view of the fact that the scale matrix and degree-of-freedom (DOF) parameters of traditional robust Kalman filter are fixed, which cannot adjust adaptively. The Pearson Type VII distribution was selected to model the heavy tailed noise to realize the adaptive estimation of 2-DOF parameters based on Cubature Kalman filter (CKF). Inverse Wishart and Gamma distributions were used to describe prior distributions of the scale matrix, 2-DOF parameters, and auxiliary parameters. Besides, time updating of these parameters was performed through a forgetting factor. Based on the variational Bayesian theory, the variational iteration of joint posterior probability density function formed by states together with the 2-DOF parameters and auxiliary parameters was performed, and the states and noise parameters were estimated simultaneously. The simulation results show that this algorithm has a higher filtering accuracy than the traditional robust CKF under the condition of uncertain heavy tailed noise.

收稿日期:2020-01-06

基金项目:国家自然科学基金国家重大科研仪器研制项目(61627810),国家科技重大专项(2018YFB1305003)

作者简介:董祥祥(1995-),女,山西省临汾市人,博士生,主要研究方向为状态估计与滤波.

通信作者:蔡云泽,女,教授,博士生导师,电话(Tel.):021-34204029;E-mail: yzca@sjtu.edu.cn.

**Key words:** heavy tailed noise; Pearson Type VII distribution; variational Bayesian (VB); joint estimation; Cubature Kalman filter (CKF)

卡尔曼滤波及其改进算法由于滤波性能良好而应用广泛<sup>[1-3]</sup>,其效果主要取决于噪声统计的先验特性,且受限于正态分布的量测噪声统计<sup>[4]</sup>.在进行目标跟踪时,传感器的不可靠因素常诱导出量测野值,导致离均值较远处的量测噪声的不确定性增大,呈现“厚尾特性”<sup>[5]</sup>.而传统的卡尔曼滤波及其改进算法使用标准高斯分布,无法准确描述实际的厚尾噪声,存在估计误差过大的问题.对此,学者们进行了大量研究,提出了广义最大似然估计法<sup>[6]</sup>、多模型方法<sup>[7]</sup>和自适应联合估计算法<sup>[8]</sup>.

广义最大似然估计方法利用量测中的高阶统计信息对状态进行估计,相比于卡尔曼滤波使用的二阶统计信息,其可提高量测非高斯条件下的状态估计精度,但该方法没有考虑量测噪声的厚尾特性,从而忽略了部分先验信息,限制了状态估计精度的提高<sup>[9]</sup>.多模型方法利用不同模式的有限高斯分布之和对特殊形式的非高斯厚尾噪声进行建模,进而通过加权高斯和计算状态后验概率密度函数,但该方法受限于模型集的选择方式和模型数量<sup>[10]</sup>.基于自适应联合估计的期望最大化方法利用 E-Step 和 M-Step 步骤对目标状态和隐变量进行辨识和估计<sup>[11]</sup>,但其估计效果受隐变量维数的影响较大,不利于期望极大化估计<sup>[12]</sup>.

针对以上问题, Piché 等<sup>[13]</sup>采用多变量 Student's t 分布对厚尾噪声进行建模,并利用变分贝叶斯理论求解状态的后验分布.但该方法假设 Student's t 分布的尺度矩阵和自由度参数固定不变,令算法不能自适应调整量测噪声的统计特性,易降低滤波器性能. Yun 等<sup>[14]</sup>提出利用 Pearson Type VII 分布描述厚尾噪声,并据此描述包含在正常量测噪声中的随机离群厚尾噪声.在测量建模中引入遵循  $\beta$ -Bernoulli 分布的判断因子,利用变分贝叶斯理论实现状态的自适应鲁棒估计. Pearson Type VII 分布不受“双自由度参数必须相等”的约束,因此对随机厚尾噪声的适应性更强,在厚尾噪声估计中具有更好的鲁棒性<sup>[15]</sup>.

为了解决在尺度矩阵和自由度参数固定不变的约束下,传统鲁棒滤波难以适应复杂时变的厚尾噪声的问题,本文以容积卡尔曼滤波器为框架,研究一种基于 Pearson Type VII 分布的自适应滤波算法 (VBCKF Pearson). 基于贝叶斯估计理论,选择

Pearson Type VII 分布作为不确定厚尾噪声的共轭先验分布;建立基于目标状态、尺度矩阵、双自由度参数、辅助参数的联合后验概率密度函数,利用变分贝叶斯方法,求解联合后验分布中待估计参数的变分近似分布;在滤波更新中,利用容积采样规则,更新非线性函数的传递和新息协方差矩阵,实现对目标状态和不确定厚尾噪声的联合估计.

## 1 问题描述

考虑如下模型,

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

式中:  $k$  为采样时刻;  $\mathbf{x}$ 、 $f(\cdot)$  和  $\mathbf{w}$  分别为状态向量、状态转移函数和过程噪声,且  $\mathbf{w}$  服从均值为 0, 协方差阵为  $\mathbf{Q}$  的高斯分布,记作  $\mathbf{w} \sim N(\mathbf{w}; 0, \mathbf{Q})$ ;  $\mathbf{z}$ 、 $h(\cdot)$  分别为量测向量和观测函数;  $\mathbf{v}$  为不确定厚尾噪声.

目前,针对厚尾噪声的鲁棒滤波算法假设量测噪声的尺度矩阵和自由度参数精确已知且不随时间变化,滤波结果依赖于给定的参数,且根据经验选取尺度矩阵和自由度参数存在一定的盲目性.对此,本文基于式(1)和(2)的模型,利用 Pearson Type VII 分布和变分贝叶斯方法,将鲁棒滤波固定自由度参数的估计转化为 Pearson Type VII 分布双自由度参数的估计,并对尺度矩阵和双自由度参数进行自适应联合估计.选择容积卡尔曼滤波器(CKF)为基础滤波器,具体算法见文献[16].

## 2 不确定厚尾噪声条件下的状态估计

### 2.1 共轭先验分布和时间更新

选择 Pearson Type VII 分布作为未知量测噪声的先验分布.在此基础上,通过遗忘因子对噪声参数进行时间更新.

Pearson Type VII 分布可被描述为高斯分布与 Gamma 分布的卷积<sup>[17]</sup>,其定义如下:

$$P(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{R}, \phi, \sigma) = \int_0^{+\infty} N(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{R}/\kappa) G\left(\kappa; \frac{\phi}{2}, \frac{\sigma}{2}\right) d\kappa \quad (3)$$

式中:  $\boldsymbol{\theta}$  为统计量;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为均值;  $\mathbf{R}$  为尺度矩阵;  $\phi$  和  $\sigma$  为双自由度参数,且当  $\phi = \sigma$  时, Pearson Type VII 分布即为 Student's t 分布;  $N(\cdot)$  为高斯分布;  $G(\cdot)$  为 Gamma 分布;  $\kappa$  为辅助参数.  $P(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{R}, \phi, \sigma)$  表示

$\theta$  服从于参数为  $\varepsilon, \mathbf{R}, \phi, \sigma$  的 Pearson Type VII 分布. 考虑量测噪声为不确定厚尾噪声, 可选择 Pearson Type VII 分布作为先验分布, 表示为

$$p(\mathbf{v}_k) = P(\mathbf{v}_k | 0, \mathbf{R}_k, \phi_k, \sigma_k) = \int_0^{+\infty} N(\mathbf{v}_k; 0, \mathbf{R}_k / \kappa_k) G\left(\kappa_k; \frac{\phi_k}{2}, \frac{\sigma_k}{2}\right) d\kappa_k \quad (4)$$

考虑  $\mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k$  和  $\sigma_k$  的不确定性与时变性, 分别选择 inverse Wishart 分布和 Gamma 分布作为先验分布, 表示为

$$\left. \begin{aligned} p(\kappa_k) &= G(\kappa_k; \hat{\alpha}_{k|k}, \hat{\beta}_{k|k}) \\ p(\mathbf{R}_k) &= \text{IW}(\mathbf{R}_k; \hat{s}_{k|k}, \hat{\mathbf{S}}_{k|k}) \\ p(\phi_k) &= G(\phi_k; \hat{a}_{k|k}, \hat{b}_{k|k}) \\ p(\sigma_k) &= G(\sigma_k; \hat{c}_{k|k}, \hat{d}_{k|k}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $\text{IW}(\cdot)$  为 inverse Wishart 分布;  $\hat{\alpha}_{k|k}$  和  $\hat{\beta}_{k|k}$  为  $\kappa_k$  的分布参数;  $\hat{s}_{k|k}$  和  $\hat{\mathbf{S}}_{k|k}$  为  $\mathbf{R}_k$  的分布参数;  $\hat{a}_{k|k}$  和  $\hat{b}_{k|k}$  为  $\phi_k$  的分布参数;  $\hat{c}_{k|k}$  和  $\hat{d}_{k|k}$  为  $\sigma_k$  的分布参数;  $k|k$  为  $k$  时刻的估计.

通过遗忘因子 ( $\rho$ ) 对上述参数进行时间更新,

$$\hat{s}_{k|k-1} = \rho(\hat{s}_{k-1|k-1} - n_z - 1) + n_z + 1 \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{k|k-1} = \rho \hat{\mathbf{S}}_{k-1|k-1} \quad (7)$$

$$\hat{a}_{k|k-1} = \rho \hat{a}_{k-1|k-1} \quad (8)$$

$$\hat{b}_{k|k-1} = \rho \hat{b}_{k-1|k-1} \quad (9)$$

$$\hat{c}_{k|k-1} = \rho \hat{c}_{k-1|k-1} \quad (10)$$

$$\hat{d}_{k|k-1} = \rho \hat{d}_{k-1|k-1} \quad (11)$$

式中:  $n_z$  为量测向量的维度;  $k|k-1$  为  $k-1$  到  $k$  时刻的预测;  $k-1|k-1$  为  $k-1$  时刻的估计.

假设  $k-1$  时刻系统状态向量的估计值为  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ , 状态误差协方差矩阵为  $\mathbf{P}_{k-1}$ , 经容积采样规则对先验  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  进行容积采样, 可得状态一步预测 ( $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ ) 和预测协方差阵 ( $\mathbf{P}_{k|k-1}$ ):

$$\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{X}_{i,k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{r}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (13)$$

$$\mathbf{X}_{i,k-1}^* = f(\mathbf{X}_{i,k-1}) \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k-1}^* \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k-1}^* \mathbf{X}_{i,k-1}^{*T} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_k \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{S}_{k-1}$  为  $\mathbf{P}_{k-1}$  经 Cholesky 分解得到的分解阵;  $\mathbf{r}_i$  为由全对称区域  $n$  维空间中以 1 为生成元的向量组成的集合的第  $i$  列;  $i=1, 2, \dots, m$ , 且  $m=2n$ ;  $m$  为总列数;  $n$  为状态向量的维度;  $\mathbf{X}_i$  为容积采样点;  $\mathbf{X}_i^*$  为  $\mathbf{X}_i$  经  $f(\cdot)$  变换后的采样点.

## 2.2 基于变分贝叶斯的近似后验

在先验分布和时间更新的基础上, 基于变分迭代思想对  $\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k$  和  $\sigma_k$  的近似后验分布进行推导和求解.

在非线性系统中, 系统状态和待估计参数的联合后验估计通常难以得到解析解. 对此, 可以利用变分贝叶斯方法得到近似后验分布. 变分贝叶斯方法通过寻找真实分布 ( $p(\cdot)$ ) 的近似分布 ( $q(\cdot)$ ), 使两者的相对熵 (KL 散度) 取最小值<sup>[6]</sup>, 即

$$\{q(\cdot)\} = \arg \min \text{KLD}(q(\cdot) \| p(\cdot)) \quad (17)$$

KL 散度可描述为

$$\text{KLD}(q(\cdot) \| p(\cdot)) = \int q(\cdot) \log \frac{q(\cdot)}{p(\cdot)} d(\cdot) \quad (18)$$

在不确定厚尾噪声条件下, 系统状态向量和尺度矩阵、双自由度参数以及辅助参数的联合后验分布及其近似分布可表示为

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \phi_k, \sigma_k, \kappa_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx q(\mathbf{x}_k) q(\mathbf{R}_k) q(\kappa_k) q(\phi_k) q(\sigma_k) \quad (19)$$

式中:  $1:k$  表示时刻 1 到  $k$ ;  $q(\mathbf{x}_k), q(\mathbf{R}_k), q(\kappa_k), q(\phi_k), q(\sigma_k)$  分别为  $\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k$  的近似后验分布. 则问题等价于

$$\log q(\zeta) = E_{\Omega^{(-\zeta)}} (\log p(\Omega, \mathbf{z}_{1:k})) + c_\zeta \quad (20)$$

$$\Omega \equiv \{\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k\}$$

式中:  $\Omega$  为待估计参数  $\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k$  和  $\sigma_k$  的集合;  $\zeta$  为  $\Omega$  中的元素;  $E(\cdot)$  为期望操作符;  $\Omega^{(-\zeta)}$  为  $\zeta$  在  $\Omega$  中的补集;  $c_\zeta$  为与  $\zeta$  有关的常数. 则有

$$\log q(\mathbf{x}_k) = c_{x_k} + E_{\mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k} (\log p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k, \mathbf{z}_{1:k})) \quad (21)$$

$$\log q(\mathbf{R}_k) = c_{\mathbf{R}_k} + E_{\mathbf{x}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k} (\log p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k, \mathbf{z}_{1:k})) \quad (22)$$

$$\log q(\kappa_k) = c_{\kappa_k} + E_{\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \phi_k, \sigma_k} (\log p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k, \mathbf{z}_{1:k})) \quad (23)$$

$$\log q(\phi_k) = c_{\phi_k} + E_{\mathbf{x}_k, \kappa_k, \mathbf{R}_k, \sigma_k} (\log p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k, \mathbf{z}_{1:k})) \quad (24)$$

$$\log q(\sigma_k) = c_{\sigma_k} + E_{\mathbf{x}_k, \kappa_k, \mathbf{R}_k, \phi_k} (\log p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k, \mathbf{z}_{1:k})) \quad (25)$$

联合后验概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\Omega, \mathbf{z}_{1:k}) &= p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \kappa_k, \phi_k, \sigma_k, \mathbf{z}_{1:k}) = \\ &N\left(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_k), \frac{\mathbf{R}_k}{\kappa_k}\right) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \times \\ &G\left(\kappa_k; \frac{\phi_k}{2}, \frac{\sigma_k}{2}\right) \text{IW}(\mathbf{R}_k; \hat{s}_{k|k-1}, \hat{\mathbf{S}}_{k|k-1}) \times \\ &G(\phi_k; \hat{a}_{k|k-1}, \hat{b}_{k|k-1}) \times \\ &G(\sigma_k; \hat{c}_{k|k-1}, \hat{d}_{k|k-1}) p(\mathbf{z}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (26)$$

在每次的量测更新过程中进行变分迭代循环 ( $j=0, 1, 2, \dots, N'-1$ ),  $N'$  为变分迭代次数. 各参数估计如下.

当  $\zeta = \mathbf{x}_k$  时,

$$\begin{aligned} \log q^{(j+1)}(\zeta) &= \log q^{(j+1)}(\mathbf{x}_k) = \\ &= -0.5(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \times \\ &E^{(j)}(\mathbf{P}_{k|k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \\ &0.5E^{(j)}(\kappa_k)(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T \times \\ &E^{(j)}(\mathbf{R}_k^{-1})(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k)) + c_{\mathbf{x}_k} \end{aligned} \quad (27)$$

故  $q^{(j+1)}(\mathbf{x}_k) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(j+1)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(j+1)})$ . 其中,  $q^{(j+1)}(\cdot)$  和  $E^{(j)}(\cdot)$  分别为相应迭代循环时参数的近似分布和期望运算,  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(j+1)}$  和  $\mathbf{P}_{k|k}^{(j+1)}$  分别为相应变分迭代循环时的状态估计和误差协方差估计.

当  $\zeta = \mathbf{R}_k$  时,

$$\begin{aligned} \log q^{(j+1)}(\zeta) &= \log q^{(j+1)}(\mathbf{R}_k) = \\ &= -0.5(\hat{s}_{k|k-1} + n_z + 2) \log(|\mathbf{R}_k|) - \\ &0.5 \text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{R}_k^{-1}) - 0.5 \mathbf{R}_k^{-1} E^{(j)}(\kappa_k) \times \\ &E[(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T] + c_{\mathbf{R}_k} \approx \\ &= -0.5(\hat{s}_{k|k-1} + n_z + 2) \log(|\mathbf{R}_k|) - \\ &0.5 \text{tr}\{\mathbf{R}_k^{-1} E^{(j)}(\kappa_k) E^{(j)}[(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k)) \times \\ &(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T] + \mathbf{R}_k^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{k|k-1}\} + c_{\mathbf{R}_k} \end{aligned} \quad (28)$$

故  $q^{(j+1)}(\mathbf{R}_k) = \text{IW}(\mathbf{R}_k; \hat{s}_{k|k}^{(j+1)}, \hat{\mathbf{S}}_{k|k}^{(j+1)})$ . 其中,  $\text{tr}(\cdot)$  为求矩阵迹运算,  $\hat{s}_{k|k}^{(j+1)}$  和  $\hat{\mathbf{S}}_{k|k}^{(j+1)}$  为相应变分迭代循环时  $\mathbf{R}_k$  的分布参数, 且

$$\hat{s}_{k|k}^{(j+1)} = \hat{s}_{k|k-1} + 1 \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{k|k}^{(j+1)} = \hat{\mathbf{S}}_{k|k-1} +$$

$$E^{(j)}(\kappa_k) E^{(j)}[(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T] \quad (30)$$

当  $\zeta = \kappa_k$  时,

$$\begin{aligned} \log q^{(j+1)}(\zeta) &= \log q^{(j+1)}(\kappa_k) = \\ &= \log \frac{\phi_k}{2} - \log \frac{\sigma_k}{2} - \Gamma\left(\frac{\phi_k}{2}\right) + \\ &\left(\frac{\phi_k}{2} - 1\right) \log \kappa_k - \frac{\sigma_k}{2} \kappa_k - \\ &\frac{1}{2} \kappa_k E^{(j)}(\mathbf{R}_k^{-1}) \times \\ &E^{(j)}[(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T] \approx \\ &\left(\frac{E^{(j)}(\phi_k)}{2} - 1\right) \log \kappa_k - \\ &\frac{1}{2} \{E^{(j)}(\sigma_k) + E^{(j)}(\mathbf{R}_k^{-1}) \times \\ &E^{(j)}[(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T]\} \kappa_k \end{aligned} \quad (31)$$

故  $q^{(j+1)}(\kappa_k) = G(\kappa_k; \hat{\alpha}_{k|k}^{(j+1)}, \hat{\beta}_{k|k}^{(j+1)})$ . 其中,  $\hat{\alpha}_{k|k}^{(j+1)}$  和  $\hat{\beta}_{k|k}^{(j+1)}$  为相应变分迭代循环时  $\kappa_k$  的分布参数, 且

$$\hat{\alpha}_{k|k}^{(j+1)} = 0.5 E^{(j)}(\phi_k) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{k|k}^{(j+1)} &= 0.5 \text{tr}\{E^{(j)}(\mathbf{R}_k^{-1}) E^{(j)}[(\mathbf{z}_k - \\ &h(\mathbf{x}_k))(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k))^T]\} + 0.5 E^{(j)}(\sigma_k) \end{aligned} \quad (33)$$

当  $\zeta = \phi_k$  时,

$$\begin{aligned} \log q^{(j+1)}(\zeta) &= \log q^{(j+1)}(\phi_k) = \\ &(\hat{b}_{k|k-1} - 1) \log(\phi_k) - \hat{a}_{k|k-1} \phi_k + \\ &\frac{E^{(j)}(\sigma_k)}{2} \log\left(\frac{\phi_k}{2}\right) - \log\left(\Gamma\left(\frac{E^{(j)}(\sigma_k)}{2}\right)\right) + \\ &E^{(j)}\left(\frac{\sigma_k}{2} - 1\right) E^{(j)}(\log \kappa_k) - \frac{\phi_k}{2} E^{(j)}(\kappa_k) \approx \\ &\left(\hat{b}_{k|k-1} - 1 + \frac{E^{(j)}(\sigma_k)}{2}\right) \log(\phi_k) - \\ &\left(\hat{a}_{k|k-1} + \frac{E^{(j)}(\kappa_k)}{2}\right) \phi_k \end{aligned} \quad (34)$$

故  $q^{(j+1)}(\phi_k) = G(\phi_k; \hat{a}_{k|k}^{(j+1)}, \hat{b}_{k|k}^{(j+1)})$ . 其中,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数,  $\hat{a}_{k|k}^{(j+1)}$  和  $\hat{b}_{k|k}^{(j+1)}$  为相应变分迭代循环时  $\phi_k$  的分布参数, 且

$$\hat{a}_{k|k}^{(j+1)} = \hat{a}_{k|k-1} + 0.5 E^{(j)}(\sigma_k) \quad (35)$$

$$\hat{b}_{k|k}^{(j+1)} = \hat{b}_{k|k-1} + 0.5 E^{(j)}(\kappa_k) \quad (36)$$

当  $\zeta = \sigma_k$  时,

$$\log q^{(j+1)}(\zeta) = \log q^{(j+1)}(\sigma_k) \quad (37)$$

故  $q^{(j+1)}(\sigma_k) = G(\sigma_k; \hat{c}_{k|k}^{(j+1)}, \hat{d}_{k|k}^{(j+1)})$ . 其中,  $\hat{c}_{k|k}^{(j+1)}$  和  $\hat{d}_{k|k}^{(j+1)}$  为相应变分迭代循环时  $\sigma_k$  的分布参数, 且

$$\hat{c}_{k|k}^{(j+1)} = \hat{c}_{k|k-1} + 0.5 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_{k|k}^{(j+1)} &\approx \hat{d}_{k|k-1} - 0.5 - 0.5 E^{(j+1)}(\log(\kappa_k)) + \\ &0.5 \log(E^{(j)}(\phi_k)) \end{aligned} \quad (39)$$

根据各估计参数的后验近似分布, 有

$$E^{(j+1)}(\mathbf{R}_k^{-1}) = (\hat{s}_{k|k}^{(j+1)} - n_z - 1) \hat{\mathbf{S}}_{k|k}^{(j+1)^{-1}} \quad (40)$$

$$E^{(j+1)}(\kappa_k) = \hat{\alpha}_{k|k}^{(j+1)} / \hat{\beta}_{k|k}^{(j+1)} \quad (41)$$

$$E^{(j+1)}(\phi_k) = \hat{a}_{k|k} / \hat{b}_{k|k} \quad (42)$$

$$E^{(j+1)}(\sigma_k) = \hat{c}_{k|k} / \hat{d}_{k|k} \quad (43)$$

### 3 基于 Pearson Type VII 分布的不确定厚尾噪声滤波

基于先验分布和联合后验概率密度函数的推导, 得出基于变分贝叶斯理论的不确定厚尾噪声滤波算法的具体步骤和流程 (见图 1), 对算法的有效性进行理论分析. 在量测噪声为不确定厚尾噪声的条件下, 设其  $k-1$  时刻对应的 Pearson Type VII 分布参数的估计值分别为  $\hat{s}_{k-1|k-1}$ 、 $\hat{\mathbf{S}}_{k-1|k-1}$ 、 $\hat{a}_{k-1|k-1}$ 、 $\hat{b}_{k-1|k-1}$ 、 $\hat{c}_{k-1|k-1}$  和  $\hat{d}_{k-1|k-1}$ , 算法的具体步骤如下.

**步骤 1** 根据式 (12)~(16), 通过容积采样得

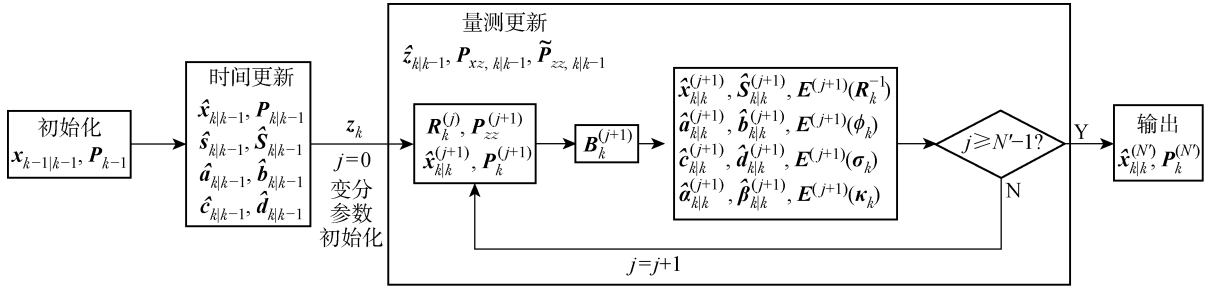


图1 算法流程图

Fig. 1 Flowchart of algorithm

到  $\hat{x}_{k|k-1}$  和  $P_{k|k-1}$ .

**步骤2** 根据式(6)~(11),通过遗忘因子对不确定厚尾噪声各参数进行时间更新.

**步骤3** 量测预测.包括容积采样和采样点经量测方程传递,以及量测预测( $\hat{z}_{k|k-1}$ )、互协方差矩阵( $P_{xz,k|k-1}$ )和伪量测误差协方差矩阵( $\tilde{P}_{zz,k|k-1}$ )更新.

$$P_{k|k-1} = S_{k|k-1} S_{k|k-1}^T \quad (44)$$

$$X_{i,k|k-1} = S_{k|k-1} r_i + \hat{x}_{k|k-1} \quad (45)$$

$$Z_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1}) \quad (46)$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k|k-1} \quad (47)$$

$$P_{xz,k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,k|k-1} Z_{i,k|k-1}^T - \hat{x}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T \quad (48)$$

$$\tilde{P}_{zz,k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k|k-1} Z_{i,k|k-1}^T - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T \quad (49)$$

式中: $Z_{i,k|k-1}$ 为将容积采样点  $X_{i,k|k-1}$  经量测方程传递后得到的量测预测值.

**步骤4** 变分迭代.包括初始化变分参数和变分迭代循环(分为修正量测噪声协方差矩阵和量测误差协方差矩阵更新、状态更新、变分参数更新).其中,初始化变分参数包括

$$\hat{x}_{k|k}^{(0)} = \hat{x}_{k|k-1}, \quad P_k^{(0)} = P_{k-1}$$

$$\hat{s}_{k|k}^{(0)} = \hat{s}_{k|k-1}, \quad \hat{S}_{k|k}^{(0)} = \hat{S}_{k|k-1}$$

$$\hat{a}_{k|k}^{(0)} = \hat{a}_{k|k-1}, \quad \hat{b}_{k|k}^{(0)} = \hat{b}_{k|k-1}$$

$$\hat{c}_{k|k}^{(0)} = \hat{c}_{k|k-1}, \quad \hat{d}_{k|k}^{(0)} = \hat{d}_{k|k-1}$$

修正量测噪声协方差矩阵和量测误差协方差矩阵更新为

$$\tilde{R}_k^{(j)} = (E^{(j)}(R_k^{-1}))^{-1} / E^{(j)}(\kappa_k) \quad (50)$$

$$P_{zz,k|k-1}^{(j+1)} = \tilde{P}_{zz,k|k-1} + \tilde{R}_k^{(j)} \quad (51)$$

状态更新为

$$K_k^{(j+1)} = P_{xz,k|k-1} (P_{zz,k|k-1}^{(j+1)})^{-1} \quad (52)$$

$$\hat{x}_{k|k}^{(j+1)} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k^{(j+1)} (z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (53)$$

$$P_k^{(j+1)} = P_{k|k-1} + K_k^{(j+1)} P_{zz,k|k-1}^{(j+1)} (K_k^{(j+1)})^T \quad (54)$$

式中: $K_k^{(j+1)}$ 为卡尔曼增益.

变分参数更新需要先进行容积采样和采样点传播,更新后得到过渡矩阵( $B_k^{(j)}$ ):

$$X_{i,k}^{(j)} = S_{k|k} r_i + \hat{x}_{k|k}^{(j)} \quad (55)$$

$$Z_{i,k}^{(j)} = h(X_{i,k}^{(j)}) \quad (56)$$

$$\hat{z}_k^{(j)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k}^{(j)} \quad (57)$$

$$B_k^{(j)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k}^{(j)} Z_{i,k}^{(j)T} - \hat{z}_k^{(j)} \hat{z}_k^{(j)T} \quad (58)$$

尺度矩阵的分布参数更新见式(29)~(30),双自由度参数的分布参数更新分别见式(35)~(36)和式(38)~(39),辅助参数分布参数更新见式(32)~(33),各待估计参数期望更新见式(40)~(43).

**步骤5** 状态估计、误差协方差矩阵和分布参数更新.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k}^{(N')}, \quad P_k = P_k^{(N')}$$

$$\hat{s}_{k|k} = \hat{s}_{k|k}^{(N')}, \quad \hat{S}_{k|k} = \hat{S}_{k|k}^{(N')}$$

$$\hat{a}_{k|k} = \hat{a}_{k|k}^{(N')}, \quad \hat{b}_{k|k} = \hat{b}_{k|k}^{(N')}$$

$$\hat{c}_{k|k} = \hat{c}_{k|k}^{(N')}, \quad \hat{d}_{k|k} = \hat{d}_{k|k}^{(N')}$$

与传统 CKF 算法相比,本文提出的 VBCKF-Pearson 算法可以实现对量测噪声协方差矩阵的自适应估计.传统 CKF 算法中量测噪声协方差矩阵固定不变,需要利用假设的量测噪声协方差矩阵对含不确定厚尾噪声的量测进行滤波.本文算法中的  $\tilde{P}_{zz,k|k-1}$  为“伪”量测协方差矩阵,量测所隐含的厚尾信息可以在  $P_{zz,k|k-1}^{(j+1)}$  所包含的尺度矩阵中体现.量测信息通过变分迭代被充分利用,实现对系统状态和不确定厚尾噪声参数统计特性的近似估计.

与鲁棒容积卡尔曼(Robust CKF)算法相比,本文提出的 VBCKF-Pearson 算法可以实现尺度矩阵和双自由度参数的同时估计.现有 Robust CKF 算法假设尺度矩阵和自由度参数固定不变,根据经验

选取参数存在一定的盲目性. 本文算法选择 Pearson Type VII 分布作为共轭先验, 动态尺度矩阵描述了不确定量测噪声的矩阵参数, 动态双自由度参数反映了不确定尺度矩阵和双自由度参数的自适应性. 在相邻 2 个时刻的滤波过程中,  $\mathbf{R}_k$ 、 $\phi_k$ 、 $\sigma_k$  和  $\kappa_k$  的后验分布中的参数利用  $k$  时刻含厚尾噪声的量测进行更新; 在一次滤波更新变分迭代中,  $\mathbf{R}_k$ 、 $\kappa_k$ 、 $\phi_k$  和  $\sigma_k$  相互耦合, 其后验分布中的参数经式(29)~(44)不断被更新至近似分布与真实分布的 KL 散度最小, 实现  $\mathbf{R}_k$ 、 $\kappa_k$ 、 $\phi_k$  和  $\sigma_k$  的同时估计.

4 仿真及分析

仿真系统为高维非线性目标跟踪系统, 其目标在笛卡尔  $O_{xy}$  坐标系内运动. 状态向量  $\mathbf{x} = [s_x \ v_x \ s_y \ v_y \ \omega]^T$ ,  $s_x$  和  $s_y$  分别为  $x$ 、 $y$  方向的位置,  $v_x$  和  $v_y$  分别为  $x$ 、 $y$  方向的速度,  $\omega$  为转弯速率, 取  $-\pi/60$ ,  $T$  为采样周期, 取 1 s. 目标运动方程<sup>[16]</sup>为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$$

(59)

式中:

$$\mathbf{w}_{k-1} \sim N(0, \mathbf{Q}_{k-1})$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} & 0 & -\frac{1-\cos(\omega T)}{\omega} & 0 \\ 0 & \cos(\omega T) & 0 & -\sin(\omega T) & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos(\omega T)}{\omega} & 1 & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} & 0 \\ 0 & \sin(\omega T) & 0 & \cos(\omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{0.1T^3}{3} & \frac{0.1T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0.1T^2}{2} & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0.1T^3}{3} & \frac{0.1T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0.1T^2}{2} & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.75 \times 10^{-4} T \end{bmatrix}$$

假设传感器位于坐标系原点, 则量测方程可表示为

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \\ \tan^{-1}(s_y/s_x) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k$$

(60)

式中:

$$\mathbf{v}_k \sim \begin{cases} N(0, \mathbf{\Sigma}_k), & p = 0.9 \\ N(0, 100\mathbf{\Sigma}_k), & p = 0.1 \end{cases}$$

$$\mathbf{\Sigma}_k = \begin{bmatrix} 2\ 500 & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v}_k$  的协方差矩阵取  $\mathbf{\Sigma}_k$  和  $100\mathbf{\Sigma}_k$  的概率( $p$ )分别为 0.9 和 0.1. 初始时刻的状态向量和状态误差协方差矩阵分别为

$$\mathbf{x}_0 = [1\ 000 \ 300 \ 1\ 000 \ 0 \ -\pi/60]$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$$

进行 100 次蒙特卡洛仿真, 每次仿真时长( $t$ )为 100 s, 变分迭代次数取  $N'=10$ .

**仿真 1** 滤波精度比较. 比较 Robust CKF 和 VBCKF Pearson 算法的平均均方根误差(MRMSE), 如表 1 所示, 以及状态估计效果和均方根误差(RMSE), 如图 2 所示. 图中, VBCKF Pearson 算法对各状态量的估计均方根误差均低于 Robust CKF 算法. 表中, VBCKF Pearson 算法对估计的  $s_x$ 、 $v_x$ 、 $s_y$ 、 $v_y$  和  $\omega$  的平均均方根误差比 Robust CKF 算法分别低 22.2%、12.1%、17.6%、6.5% 和 2.4%. 结果表明, 在不确定厚尾噪声条件下, 本文算法对目标的跟踪精度更高.

**仿真 2** 参数分析. 为了进一步研究 VBCKF Pearson 算法的性能, 对比了 3 种算法对目标状态的估计效果和均方根误差, 如图 3 所示, 以及各算法的平均均方根误差, 已在表 1 中展示. 其中, VBCKF Pearson-R 算法固定参数  $\phi$ 、 $\sigma$  并同时估计尺度矩阵和状态量, VBCKF Pearson-r 算法固定尺度矩阵并

表 1 平均均方根误差  
Tab. 1 Mean of root mean square error

滤波算法	MRMSE				
	$s_x/\text{m}$	$v_x/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$s_y/\text{m}$	$v_y/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\omega/[(^\circ) \cdot \text{s}^{-1}]$
Robust CKF	43.444 4	16.804 2	36.507 5	15.064 7	0.028 3
VBCKF Pearson	33.780 1	14.782 1	30.066 4	14.083 5	0.027 6
VBCKF Pearson-R	50.908 8	18.817 7	45.519 4	17.574 4	0.029 7
VBCKF Pearson-r	44.249 1	17.963 8	39.916 6	16.586 7	0.029 4

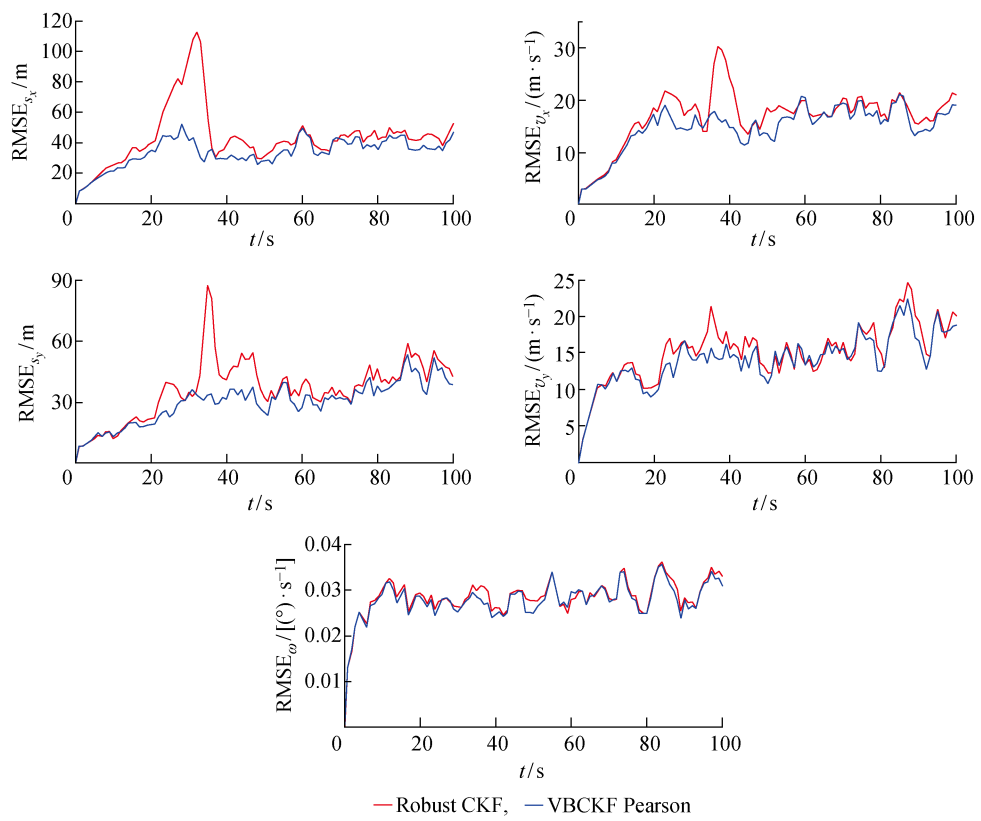


图 2 Robust CKF 和 VBCKF Pearson 算法的均方根误差  
Fig. 2 RMSE of Robust CKF and VBCKF Pearson algorithms

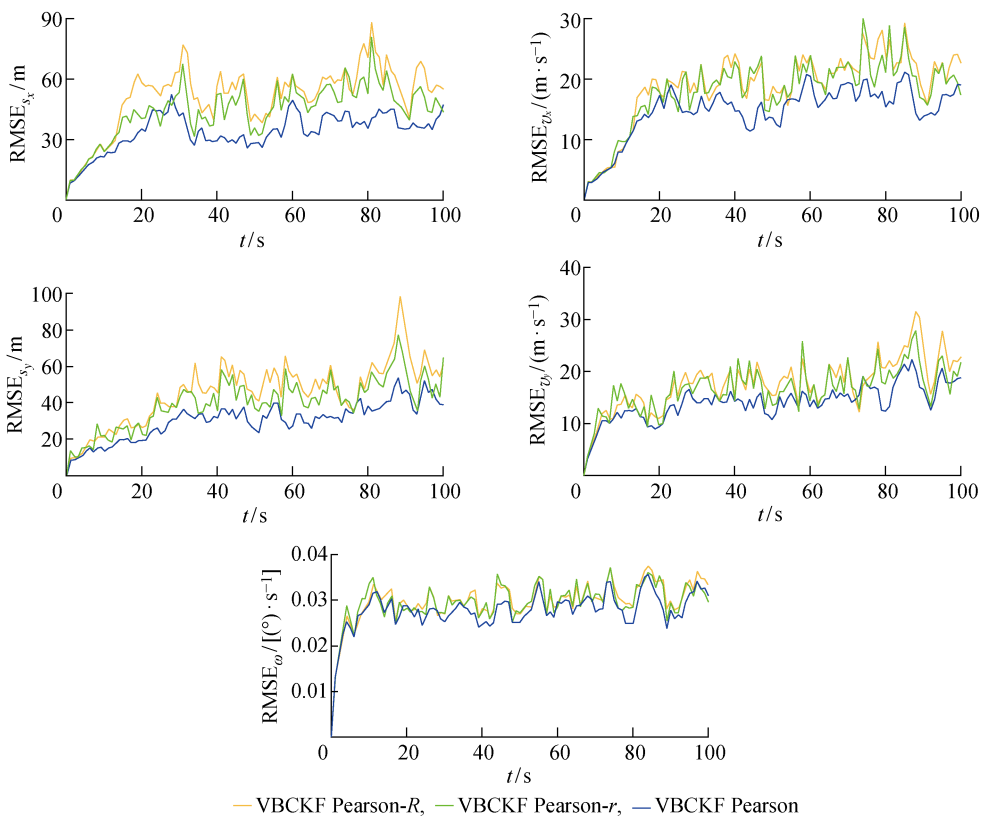


图 3 不同 VBCKF Pearson 算法的均方根误差  
Fig. 3 RMSE of different VBCKF Pearson algorithms

同时估计状态量和  $\phi, \sigma$ , VBCKF Pearson 算法同时估计状态量、尺度矩阵和参数  $\phi, \sigma$ 。

图 3 中, VBCKF Pearson 算法对  $s_x$  估计的均方根误差最小, VBCKF Pearson- $r$  算法次之, VBCKF Pearson- $R$  算法最大。VBCKF Pearson 算法对  $v_x$  的估计误差均低于 20 m/s。且其目标状态量估计的均方根误差均最低。表 1 中, VBCKF Pearson 算法对  $s_x, v_x, s_y, v_y$  和  $\omega$  的平均均方根误差比 VBCKF Pearson- $R$  算法分别低 33.6%、21.4%、33.9%、19.8% 和 7.1%, 比 VBCKF Pearson- $r$  算法分别低 23.6%、17.7%、24.6%、15.1% 和 6.1%。这是由于量测噪声的不确定信息不仅包含在尺度矩阵中, 还包含在参数  $\phi, \sigma$  中。仅估计尺度矩阵而固定  $\phi$  和  $\sigma$ , 或仅估计  $\phi$  和  $\sigma$  而固定尺度矩阵都会限制信息的自适应更新。所以, 同时估计各参数更利于充分利用量测信息对目标状态进行估计。

**仿真 3** 计算复杂度分析。采用浮点运算数 (flops) 进行计算复杂度分析<sup>[18]</sup>。Robust CKF 和 VBCKF Pearson 算法的浮点运算数分别为

$$\begin{aligned} \text{flops}_1 &= \frac{50}{3}n^3 + 3n^2 + 12n^2n_z + 2nm_z + 2n_z^2 + \\ &N' \left( \frac{13}{3}n^3 + 6n^2n_z + 8m_z^2 + \frac{10}{3}n_z^3 + 3n_z^2 + n_z \right) \\ \text{flops}_2 &= \frac{50}{3}n^3 + 3n^2 + 12n^2n_z + 2nm_z + 2n_z^2 + \\ &N' \left( \frac{13}{3}n^3 + 6n^2n_z + 8m_z^2 + \frac{10}{3}n_z^3 + \right. \\ &\left. 3n_z^2 + n_z + 2\text{flops}_3 + \text{flops}_4 \right) \end{aligned}$$

式中:  $\text{flops}_3$  和  $\text{flops}_4$  分别为对数运算和 digamma 函数的浮点运算数。

就计算复杂度而言, 由于  $N' \geq 1$ , 故有  $\text{flops}_2 > \text{flops}_1$ , 即 VBCKF Pearson 算法的计算复杂度在数值上大于传统 Robust CKF 算法。就计算复杂度的数量级而言:  $\text{flops}_1 = O(n^3, n_z^3)$ ,  $\text{flops}_2 = O(n^3, n_z^3)$ , 其中  $O(\cdot)$  为阶数。2 种算法的计算复杂度均与维度成 3 次方关系, 即计算复杂度为同一数量级。在蒙特卡洛仿真过程中, Robust CKF 和 VBCKF Pearson 算法进行 1 次完整的滤波所对应的平均运行时间分别为 0.048 0 s 和 0.051 0 s。综上可知, 本文算法的运行时间虽然较长, 但计算复杂度与传统 Robust CKF 算法属于同一数量级; 此外, 本文算法的状态估计精度更高。

## 5 结语

提出一种不确定厚尾噪声条件下的自适应滤波

算法。针对传统鲁棒容积卡尔曼滤波器无法估计时变不准确的尺度矩阵和自由度参数的问题, 选择 Pearson Type VII 分布对不确定厚尾噪声进行建模, 并分别选择 inverse Wishart 和 Gamma 分布作为 Pearson Type VII 分布参数的先验分布。在此基础上, 利用变分贝叶斯方法, 实现状态向量、双自由度参数、辅助参数和尺度矩阵的联合估计。仿真结果表明, 在不确定厚尾噪声条件下, 本文算法的滤波精度高于传统鲁棒容积卡尔曼滤波算法。

## 参考文献:

- [1] 杨峰, 郑丽涛, 王家琦, 等. 双层无迹卡尔曼滤波[J]. 自动化学报, 2019, 45(7): 1386-1391.  
YANG Feng, ZHENG Litao, WANG Jiaqi, *et al.* Double layer unscented Kalman filter[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(7): 1386-1391.
- [2] 李建, 何黎明, 蔡云泽. 带有等式状态约束的多传感器数据融合算法[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(7): 893-898.  
LI Jian, HE Liming, CAI Yunze. Multi-sensor data fusion algorithm with state equality constraints[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2014, 48(7): 893-898.
- [3] 胡兵, 杨明, 郭林栋, 等. 基于地面快速鲁棒特征的智能车全局定位方法[J]. 上海交通大学学报, 2019, 53(2): 81-86.  
HU Bing, YANG Ming, GUO Lindong, *et al.* Global localization for intelligent vehicles using ground SURF[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2019, 53(2): 81-86.
- [4] LI K L, CHANG L B, HU B Q. A variational Bayesian-based unscented Kalman filter with both adaptivity and robustness[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(18): 6966-6976.
- [5] AGAMENNONI G, NEBOT E M. Robust estimation in non-linear state-space models with state-dependent noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(8): 2165-2175.
- [6] CHEN B D, LIU X, ZHAO H Q, *et al.* Maximum correntropy Kalman filter[J]. *Automatica*, 2017, 76: 70-77.
- [7] LI X R, JILKOV V P. Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, 41(4): 1255-1321.
- [8] DONG P, JING Z L, LEUNG H, *et al.* Variational Bayesian adaptive cubature information filter based on Wishart distribution[J]. *IEEE Transactions on Auto-*

matic Control, 2017, 62(11): 6051-6057.

[ 9 ] IZANLOO R, FAKOORIAN S A, YAZDI H S, *et al.* Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise [C]// **2016 Annual Conference on Information Science and Systems (CISS)**. Princeton, NJ, USA: IEEE, 2016: 500-505.

[10] BILIK I, TABRIKIAN J. MMSE-based filtering in presence of non-Gaussian system and measurement noise[J]. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, 2010, 46(3): 1153-1170.

[11] TZIKAS D G, LIKAS A C, GALATSANOS N P. The variational approximation for Bayesian inference [J]. **IEEE Signal Processing Magazine**, 2008, 25(6): 131-146.

[12] 潘泉, 胡玉梅, 兰华, 等. 信息融合理论研究进展: 基于变分贝叶斯的联合优化[J]. **自动化学报**, 2019, 45(7): 1207-1223.

PAN Quan, HU Yumei, LAN Hua, *et al.* Information fusion progress: Joint optimization based on variational Bayesian theory[J]. **Acta Automatica Sinica**, 2019, 45(7): 1207-1223.

[13] PICHÉ R, SÄRKKÄ S, HARTIKAINEN J. Recursive outlier-robust filtering and smoothing for nonlinear systems using the multivariate Student-t distribution[C] // **2012 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing**. Santander, Spain: IEEE, 2012: 1-6.

[14] YUN P, WU P L, HE S. Pearson type VII distribution-based robust Kalman filter under outliers interference[J]. **IET Radar, Sonar & Navigation**, 2019, 13(8): 1389-1399.

[15] HUANG Y L, ZHANG Y G, SHI P, *et al.* Robust Kalman filters based on Gaussian scale mixture distributions with application to target tracking[J]. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, 2019, 49(10): 2082-2096.

[16] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters[J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2009, 54(6): 1254-1269.

[17] SUN J Y, KABAN A, GARIBALDI J M. Robust mixture modeling using the Pearson type VII distribution[C] // **The 2010 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)**. Barcelona, Spain: IEEE, 2010: 1-7.

[18] GOLUB G H, VAN LOAN C F. Matrix computations[M]. 4th ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013.

(本文编辑: 孙伟)