

文章编号: 1006-2467(2020)06-0569-08

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2019.016

基于测点优选和改进 L 曲线法的动载荷识别

李晓旺, 赵海涛, 陈吉安

(上海交通大学 航空航天学院, 上海 200240)

摘 要: 在载荷识别研究中, 为克服不适定问题, 提出分两步降低传递函数的病态性以及削弱噪声的影响. 首先, 依据传递函数的条件数通过理论计算获得结构响应的最佳测点组合, 并得出病态程度最低的传递函数矩阵; 然后, 采取 Tikhonov 正则化方法反演输入载荷, 在反演过程中引入 B 样条函数对 L 曲线进行插值, 以获得更加精确的正则化参数. 仿真结果表明: 该方法能够有效减小载荷识别的误差, 识别出更加准确的载荷时间历程.

关键词: 载荷识别; 最佳测点; B 样条函数; L 曲线; 正则化

中图分类号: O 34; TU 311.3

文献标志码: A

Force Identification Based on Measuring Point Selection and Improved L-Curve Method

LI Xiaowang, ZHAO Haitao, CHEN Ji'an

(School of Aeronautics and Astronautics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: To solve the ill-posed problem, a two-step ideology is proposed to reduce the ill condition of transmissibility function and weaken the influence of noise in force identification research. First, the optimal combination of measurement points is calculated based on the conditional number theory of transfer function, and a transfer function matrix with the lowest degree of ill condition is obtained. Then, Tikhonov regularization is adopted to identify input excitation. In the procedure mentioned above, B-spline function is introduced to interpolate L-curve to acquire more exact regularization parameters. Simulation results show that the method proposed is able to effectively reduce force identification error and achieve a more accurate force time history.

Key words: force identification; optimum measuring point; B-spline function; L-curve; regularization

动态载荷识别^[1]是结构动力学中的第 2 类反问题. 目前, 载荷识别方法主要有频域法、时域法以及其他一些智能算法^[2-4]. 对于每一种算法而言, 其最终目的都是要建立起输入载荷和输出响应以及系统特性之间的数学模型. 由于反求输入载荷的过程需要对数学模型中的传递函数矩阵求逆, 并且被测响应容易受到环境噪声的干扰, 往往会导致出现不适

定问题.

为了尽量减小传递函数矩阵的病态性和响应噪声对载荷识别精度的负面影响, 国内外学者做了大量的研究工作. 这些研究总体上可分为两种思路: 第 1 种思路为通过优化响应点的位置^[5-6]获得病态程度较低的传递函数矩阵, 然后直接求广义逆; 第 2 种思路为避免对传递函数矩阵直接求逆, 而是通过一

收稿日期: 2019-01-14

作者简介: 李晓旺 (1990-), 男, 河北省唐山市人, 博士生, 研究方向为结构动力学分析.

通信作者: 赵海涛, 男, 副教授, E-mail: zht@sjtu.edu.cn.

定的技术手段对振动方程进行特殊处理,间接反演动态激励,比较典型的方法有奇异值分解(SVD)法^[7]和 Tikhonov 正则化方法^[8].对于正则化方法来说,如何选择正则化参数是关键,而 L 曲线法^[9-10]是最为常用的计算正则化参数的方法.

然而,目前的研究鲜见将两种思路结合起来.对此,本文提出在时域中分 2 步解决不适定问题.第 1 步对不同测点对应的传递函数矩阵进行分析,找出条件数最小的传递函数矩阵,从而获得最佳测点.第 2 步采用 Tikhonov 正则化重构载荷.同时,针对正则化方法精度不高的缺点,在确定正则化参数的过程中对 L 曲线法进行改进,即引入 B 样条函数^[11]对 L 曲线进行插值,并通过计算 B 样条曲线的各点曲率获得更加准确的正则化参数.

1 基于 Taylor 多项式迭代的载荷识别方法

采用 Taylor 多项式迭代法^[12]在时域内识别载荷时间历程.对于一个多输入多输出的振动系统,其振动微分方程可表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 分别为质量、阻尼和刚度矩阵; $\ddot{\mathbf{X}}(t)$, $\dot{\mathbf{X}}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ 分别为加速度、速度和位移向量; $\mathbf{f}(t)$ 为载荷向量.

为了将振动方程解耦,总时间历程被离散成 n 个时刻.对于任意相邻的第 i 时刻 t 和第 $i+1$ 时刻 $t+\Delta t$, $t+\Delta t$ 时刻的振动响应被近似地表示为 t 时刻响应的 Taylor 多项式展开形式,即

$$\ddot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \ddot{\mathbf{X}}(t) + \Delta t \mathbf{P}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{P}_2 \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{X}}(t) + \Delta t \ddot{\mathbf{X}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{P}_1 + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{P}_2 \quad (3)$$

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) = \mathbf{X}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{X}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{P}_1 + \frac{\Delta t^4}{24} \mathbf{P}_2 \quad (4)$$

式中: \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 本质上为 $\mathbf{X}(t)$ 的 3 阶和 4 阶导数,形式上为 $\mathbf{X}(t)$, $\dot{\mathbf{X}}(t)$, $\ddot{\mathbf{X}}(t)$ 和 $\mathbf{f}(t+\Delta t)$ 的线性组合.将式(2)~(4)代入式(1)即可求出 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 .经简化后可获得第 $i+1$ 时刻和第 i 时刻的线性关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \ddot{\mathbf{X}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_a \\ \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_v & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{D}_d & \mathbf{D}_v & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \dot{\mathbf{X}}_i \\ \ddot{\mathbf{X}}_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_d, \mathbf{A}_v, \mathbf{A}_a, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_d, \mathbf{B}_v, \mathbf{B}_a, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_d, \mathbf{D}_v, \mathbf{D}_a$ 均为 $m \times m$ 阶定常矩阵;下标 a, d, v 分别为加速度、位移和速度; \mathbf{F} 为从 $t_1 \sim t_{n+1}$ 时刻的全部激励组合.

设结构自由度数为 m ,则对式(5)作递归可得到总线性离散方程为

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{F} \quad (6)$$

式中: \mathbf{Y}_1 为从 $t_1 \sim t_n$ 时刻的全部响应组合; \mathbf{H}_1 为总体传递函数矩阵.

2 载荷时间历程重构

通过式(6)反求输入载荷的过程中,由于传递函数矩阵 \mathbf{H}_1 具有较强的病态性,并且响应信号较易混入随机扰动噪声,导致由 $\mathbf{F} = \mathbf{H}_1^+ \mathbf{Y}_1$ 求出的值往往不能反映真实的载荷历程.针对上述问题,分两步对式(6)作技术处理,从而获得载荷识别的稳定解.

2.1 响应测点的优选方法

不同的响应测点组合所对应的传递函数为 \mathbf{H}_i 的不同子矩阵,测点优选的关键在于找到病态性最弱的传递函数矩阵.设振动系统受到的激励数为 N_f ,被测响应点数为 N_r .对于已知输出反求输入的逆问题而言,输入量对应传递函数的列数,输出量对应传递函数的行数.根据矩阵理论,获得唯一输入解的前提条件是传递函数矩阵列满秩,即列数小于行数,这也意味着选取的被测响应点数应多于激励数量($N_r > N_f$).然而测点数越多,意味着传递函数矩阵的维数越大,计算误差也会随之增大.因此,测点数量不能无限增加,比较合理的选取方案是比激励数多 1~2 个即可.测点的选取共有 $C_m^{N_f}$ 种组合情况,对于第 i 种组合情况,其对应的传递函数矩阵表示为 \mathbf{H}_i .数学上一般用条件数来定量表征矩阵的病态性,条件数越大代表病态程度越高. \mathbf{H}_i 的条件数可以表示为

$$\text{cond}(\mathbf{H}_i) = \|\mathbf{H}_i\| \|\mathbf{H}_i^+\| \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, C_m^{N_f})$$

通过遍历全部组合情况可以找到条件数最小的传递函数矩阵 \mathbf{H} ,此时的测点组合 \mathbf{Y} 即为最佳选择,从而实现了响应测点的优化配置.

2.2 改进的 L 曲线法

在获得最佳测点的响应值并确定了条件数最小的传递函数矩阵之后,采用 Tikhonov 正则化技术

重构式(6)中的输入载荷. 设系统误差 e 为

$$e = Y - HF \tag{8}$$

引入罚函数 J 的概念

$$J = (e^T e) + \lambda(F^T F) \tag{9}$$

当 J 对 F 的 1 阶导数为 0, 误差 e 达到最小值. 此时激励 F 可以表示为

$$F = (H^T H + \lambda I)^{-1} H^T Y \tag{10}$$

式中: I 为单位矩阵; λ 为正则化参数.

正则化技术的核心在于如何选择合适的正则化参数 λ , L 曲线法是常用的一种计算 λ 的方法. 该方法的思路是选取一系列不同的 λ 值, 分别计算每一个 λ 所对应的 $\lg \|Y - HF\|$ 和 $\lg \|F\|$ 值. 然后以 $\lg \|Y - HF\|$ 为横坐标, $\lg \|F\|$ 为纵坐标作图, 其曲线形状类似于字母“L”. 在 L 曲线的拐点位置可找出曲率最大的一个点, 该点对应的 λ 值即为最合适的正则化参数.

然而, 传统的 L 曲线法存在一定的缺陷. 首先, 该方法的第 1 步对 λ 值的选取具有一定的盲目性, 很可能会遗漏最准确的 λ 值. 其次, 由于受到矩阵 H 奇异性的影响, 对 $\lg \|Y - HF\|$ 和 $\lg \|F\|$ 求 1 阶和 2 阶导数很容易偏离真实值, 从而直接造成 L 曲线的曲率计算结果不可靠.

为弥补上述不足, 本文建立了基于 B 样条插值的改进 L 曲线算法. 首先依据常规方法获得 L 曲线, 然后截取 L 曲线的拐点部分(L-Co)进行插值操作, 最后计算 B 样条各点曲率从而获得最佳正则化参数.

2.2.1 L-Co 的 B 样条插值 设 L-Co 共有 N_c 个坐标, 第 j 个坐标为 (x_j, y_j) , 其对应的正则化参数为 λ_j , 则共可以组成 N_c 个 B 样条插值函数的控制顶点, 任意一个控制顶点 P_i 可表示为

$$P_i = [\lambda_{i+1} \quad x_{i+1} \quad y_{i+1}] \tag{11}$$

$(i = 0, 1, \dots, N_c - 1)$

对 L-Co 进行 k 次 B 样条插值后, 曲线可写为

$$S(u) = \sum_{i=0}^{N_c-1} N_{i,k}(u) P_i \tag{12}$$

$0 \leq u \leq 1$

式中: $N_{i,k}(u)$ 为定义在节点矢量 $U = [u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_{N_c+k}]$ 上的 k 次 B 样条基函数, $N_{i,k}(u)$ 的计算公式为

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{13}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \tag{14}$$

经过 B 样条插值操作后, L-Co 涵盖的 λ 值远远超过预先选取的控制点的数量, 避免了遗漏最佳正则化参数的可能. 与选取同样数量 λ 值计算 L 曲线坐标的传统方法相比, B 样条插值操作的计算量要小的多.

2.2.2 L-Co 的各点曲率求解 经过插值操作后, 计算 L-Co 各点的曲率问题可以转化为计算 B 样条函数的曲率问题. 对 k 次 B 样条曲线求 1 阶导数的公式为

$$S'(u) = k \sum_{i=0}^{N_c-2} N_{i,k-1}(u) \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} \tag{15}$$

令

$$Q_i = k \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+k+1} - u_{i+1}}$$

则式(15)可以改写为

$$S'(u) = \sum_{i=0}^{N_c-2} N_{i,k-1}(u) Q_i \tag{16}$$

将式(16)和(12)比较可知, k 次 B 样条曲线的 1 阶导数恰好是一条新的 $k-1$ 次 B 样条曲线. 因此, 求 $S(u)$ 的 2 阶导数只需根据式(15)计算 $S'(u)$ 的 1 阶导数即可求出 $S''(u)$ 的值. 插值后的 L-Co 是一条二维平面曲线, 所以 $S'(u)$ 和 $S''(u)$ 分别对应坐标 (x', y') 和 (x'', y'') , 则 L-Co 各点的曲率 C_u 的计算公式为

$$C_u = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \tag{17}$$

曲率最小值所对应的 λ 值即为最优正则化参数, 代入式(10)可以重构输入载荷.

3 数值算例研究

为验证所提方法的可行性和有效性, 建立了 3 个不同的数值算例. 3 个算例所施加载荷的数量和复杂程度逐渐增加, 扰动噪声的水平也依次升高. 采用本文算法分别对 3 个算例的输入载荷进行重构, 并与最差测点识别结果以及奇异值分解法识别结果进行对比.

3.1 正弦载荷识别算例

算例(T)1 建立了一个悬臂梁模型, 悬臂梁各项参数分别为弹性模量 $E=70 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu=0.35$, 密度 $\rho=2\,700 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 长宽高尺寸为 $600 \text{ mm} \times 60 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$. 受正弦激励的悬臂梁模型如图 1 所示, 对悬臂梁模型施加 2 个正弦时变载荷, 2 个动态激励可表示为

$$\begin{cases} F_1 = 150 \sin(4\pi t) \\ F_2 = 210 \sin(2\pi t) \end{cases} \tag{18}$$

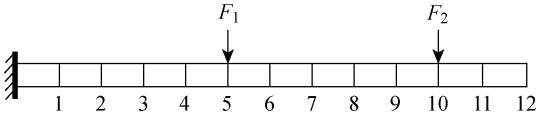


图 1 受正弦激励的悬臂梁模型
Fig. 1 Cantilever beam model with sinusoidal excitation

为重构输入载荷至少需要选取 3 个响应测点，共存在 $C_{12}^3=220$ 种可能的组合情况，针对每一种组合情况，计算对应的传递函数矩阵条件数，计算结果如图 2 所示。

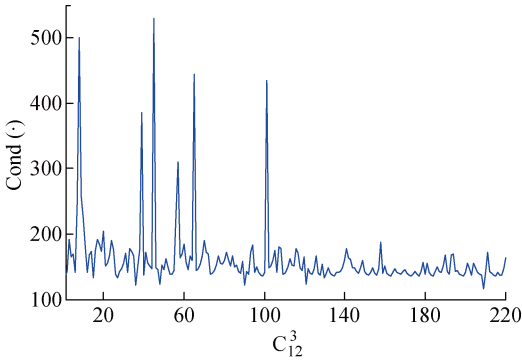


图 2 T1 中不同测点组合对应的条件数
Fig. 2 Condition numbers at different measure points of T1

根据图 2 可知，第 209 种组合情况可获得最小条件数为 97，对应最佳测点为 7、10、12；第 45 种组合情况可获得最大条件数为 441，对应最差测点为 1、7、12。

在分别获得最佳测点和最差测点的响应值前提下，对被测响应混入 5% 的 Gaussian 白噪声，采用改进的 L 曲线法计算最佳测点下的最佳正则化参数 λ 。T1 中的整体 L 曲线如图 3 所示，对 L-Co 进行 B 样条插值的结果如图 4 所示，所有 λ 对应的 L-Co 曲率如图 5 所示，其中 C_u 为曲率。

由图 5 可知，当 $\lambda=9.87\times10^{-6}$ 时，L-Co 的曲率达到最大值。将该 λ 值代入式(10)，即可反求输入载荷的时间历程。本文方法和两种对照方法的识别结果如图 6 所示，其识别误差如表 1 所示。

由图 6 可知，本文算法对正弦载荷的识别结果与真实值吻合得较好。由表 1 可知，本文算法的识别误差低于另外两种算法。同时，SVD 法的识别误差也保持在较低水平，低于选用最差测点的识别误差。这说明对于载荷数量较少且形式简单、噪声影响水平较低的载荷识别问题来说，SVD 法也可以适用，测点的选取对识别精度的影响要大于不同重构算法的影响。

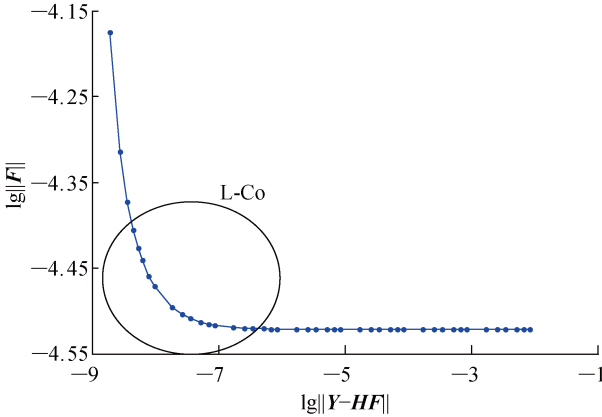


图 3 T1 的 L 曲线图
Fig. 3 L-curve of T1

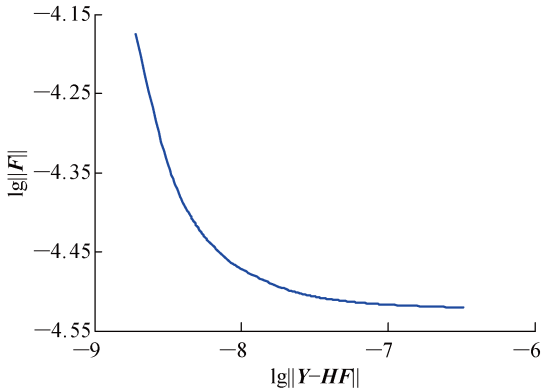


图 4 T1 中 L-Co 的 B 样条插值结果
Fig. 4 L-Co based on B-spline interpolation of T1

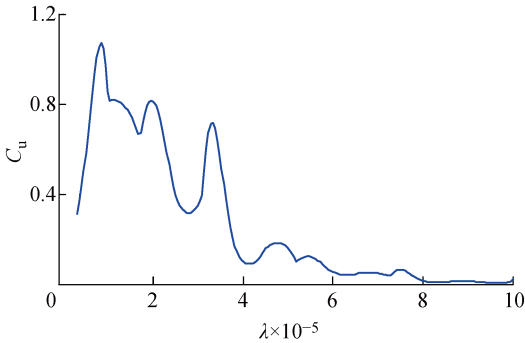


图 5 T1 中 L-Co 各点曲率计算结果
Fig. 5 Curvature values of L-Co in T1

表 1 T1 载荷识别误差
Tab. 1 Load identification error of T1

	$F_1/\%$	$F_2/\%$
最佳测点+改进 L 曲线	2.71	2.29
最佳测点+SVD 法	3.45	3.75
最差测点+改进 L 曲线	5.69	6.07

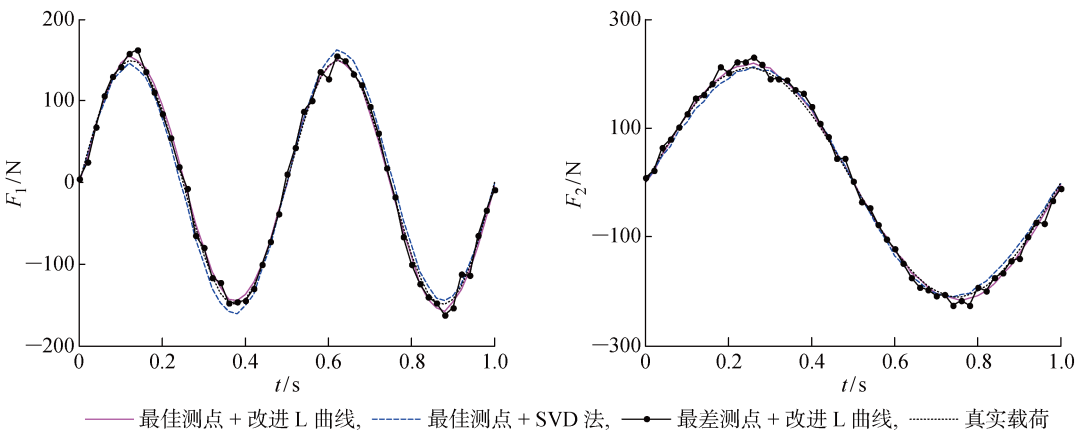


图 6 T1 载荷时间历程重构结果

Fig. 6 Force time history reconstruction of T1

3.2 正弦叠加载荷识别算例

T2 选用和 T1 相同的悬臂梁模型,该结构受到 3 个正弦叠加载荷的激励,受力情况如图 7 所示.

3 个动态激励的表达式为

$$\left. \begin{aligned} F_3 &= 120\sin(2\pi t) + 80\cos(3\pi t) \\ F_4 &= 110\sin(\pi t) + 70\cos(5\pi t) \\ F_5 &= 100\sin(3\pi t) + 90\cos(4\pi t) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

反演动态激励至少需要从 12 个节点中获得 4 个测点的动态响应,共存在 $C_{12}^4=495$ 种可能的组合情况. 根据测点优选方法计算每一种组合情况对应的传递函数矩阵条件数,计算结果如图 8 所示.

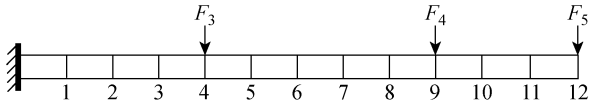


图 7 受正弦叠加载荷的悬臂梁模型

Fig. 7 Cantilever beam model with sinusoidal superposition excitation

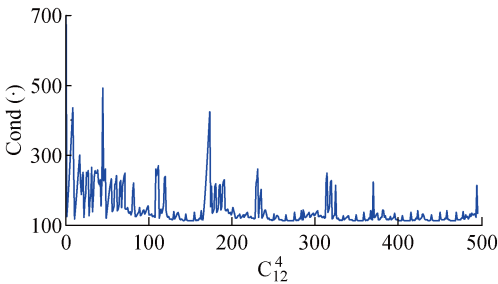


图 8 T2 中不同测点组合对应的条件数

Fig. 8 Condition numbers at different measure points of T2

依据图 8 所示的计算结果,当组合数为 271 时,得到最小条件数为 112,对应的最佳测点为 2、7、9、

11;当组合数为 1 时,得到最大条件数为 811,对应的最差测点为 1、2、3、4.

接下来通过仿真获得最佳测点和最差测点的响应值,对响应混入 10% 的 Gaussian 白噪声. 采用改进的 L 曲线法计算最佳正则化参数 λ . 图 9~11 分别为 T2 的 L 曲线图、B 样条插值后的 L-Co 图,以及 L-Co 的曲率图.

根据图 11 中的曲率计算结果,当 $\lambda=2.06 \times 10^{-5}$ 时,L-Co 的曲率获得最大值. 将该 λ 值代入式 (10)重构 3 个正弦叠加激励的时间历程. 动载荷的识别结果如图 12 所示,其识别误差 e 如表 2 所示.

表 2 T2 载荷识别误差
Tab. 2 Load identification error of T2

	$e_{F_3}/\%$	$e_{F_4}/\%$	$e_{F_5}/\%$
最佳测点+改进 L 曲线	5.72	4.23	5.15
最佳测点+SVD 法	7.15	6.94	6.73
最差测点+改进 L 曲线	6.18	7.03	5.89

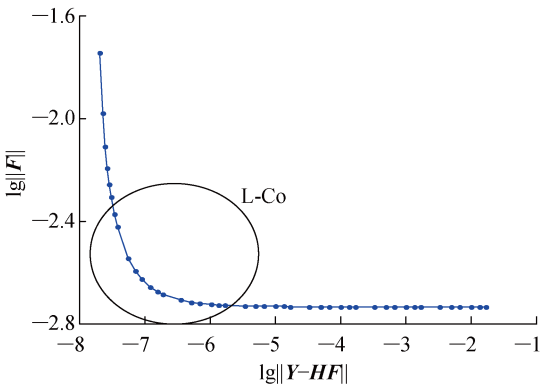


图 9 T2 的 L 曲线图

Fig. 9 L-curve of T2

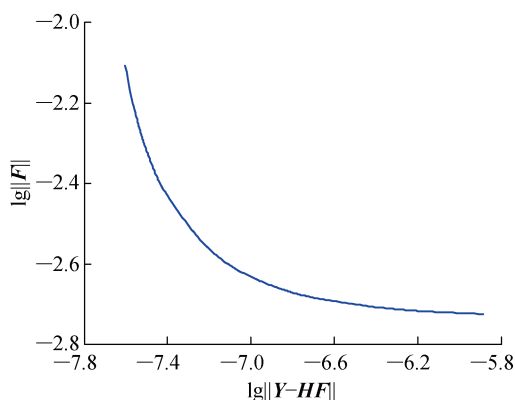


图10 T2中L-Co的B样条插值结果

Fig. 10 L-Co based on B-spline interpolation of T2

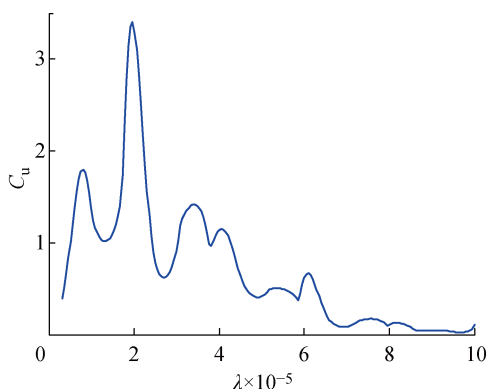


图11 T2中L-Co各点曲率的计算结果

Fig. 11 Curvature values of L-Co in T2

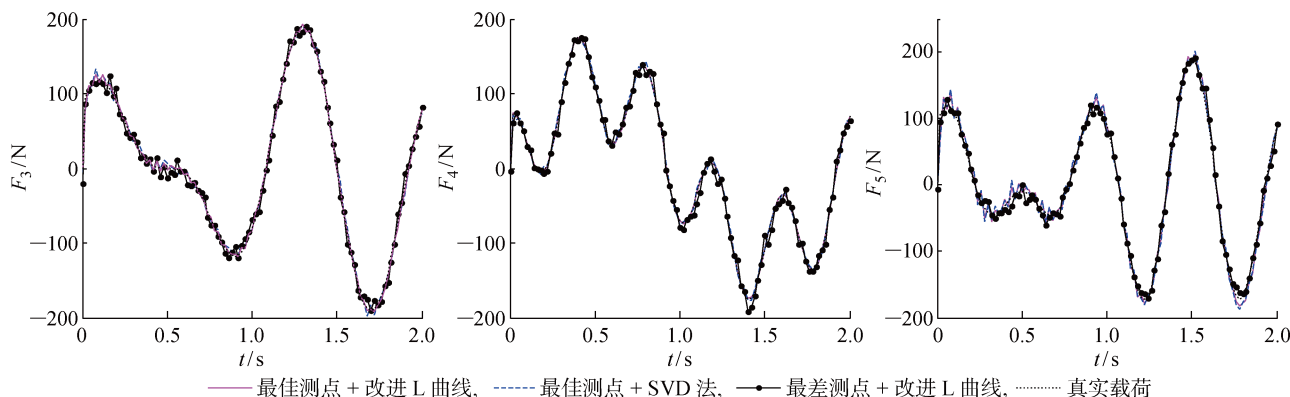


图12 T2载荷时间历程重构结果

Fig. 12 Force time history reconstruction of T2

由图12可知,本文算法可以较为准确地反演出正弦叠加激励的时间历程,其识别结果相比于另外两种算法更靠近真实载荷.从表2可以看出,由于T2的载荷复杂度、载荷数量以及噪声水平均高于T1,导致算法的识别误差比T1有所提高.而从数据值来看,3个载荷的识别误差均在6%以下,仍属于较低水平且低于两种对照算法的误差,体现了所提算法的优越性.

3.3 Gaussian白噪声载荷识别算例

T3建立了一个桁架模型,其各项参数为 $E=200\text{ GPa}$, $\mu=0.3$, $\rho=7\,800\times 10^3\text{ kg/m}^3$,截面积为 20 cm^2 ,所有水平桁架和竖直桁架的长度均为 1 m .对桁架模型施加4个Gaussian白噪声载荷,载荷幅值分别为 80 N 、 70 N 、 60 N 、 50 N ,如图13所示.

为识别4个输入载荷,需要选取5个响应测点,存在 $C_{12}^5=792$ 种可能的组合情况,每一种组合情况所对应的传递函数矩阵条件数如图14所示.

由图14可知,当测点组合数为595时,条件数取到最小条件数为194,对应的最佳测点为3、4、9、11、12;当组合数为109时,条件数取到最大条件数

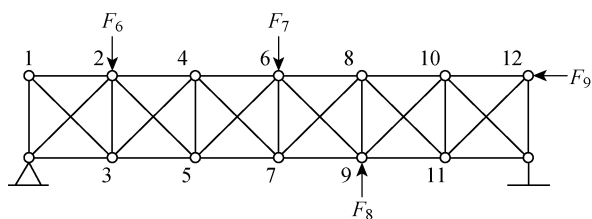


图13 受Gaussian白噪声激励的桁架模型

Fig. 13 Truss model with white Gaussian noise excitation

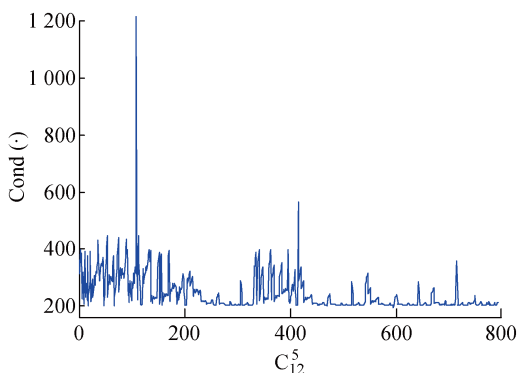


图14 T3中不同测点组合对应的条件数

Fig. 14 Condition numbers at different measure points of T3

为 1 215,其对应的最差测点为 1、2、7、10、12。

对被测响应混入 15% 的 Gaussian 白噪声,然后采用改进的 L 曲线法求解正则化参数 λ 的最佳值。图 15~17 分别为 T3 的 L 曲线图、B 样条插值后的 L-Co 图,以及 L-Co 的曲率图。

由图 17 可知,当 L-Co 的曲率达到最大值时,对应的最佳 λ 值为 4.91×10^{-5} 。根据式(10)重构输入激励,T3 的载荷重构结果如图 18 所示,其识别误差如表 3 所示。

与前两个算例相比,T3 的 Gaussian 白噪声激励是时变载荷中复杂程度最高的一种。从图 18 中的

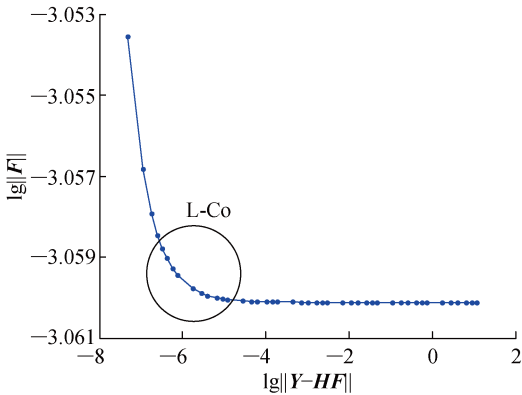


图 15 T3 的 L 曲线图
Fig. 15 L-curve of T3

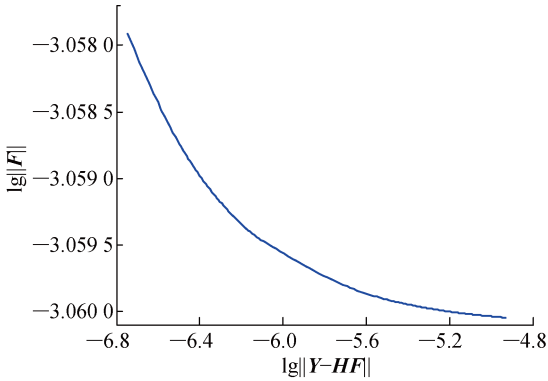


图 16 T3 中 L-Co 的 B 样条插值结果
Fig. 16 L-Co based on B-spline interpolation of T3

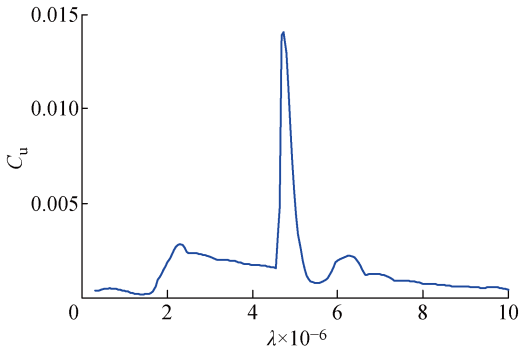
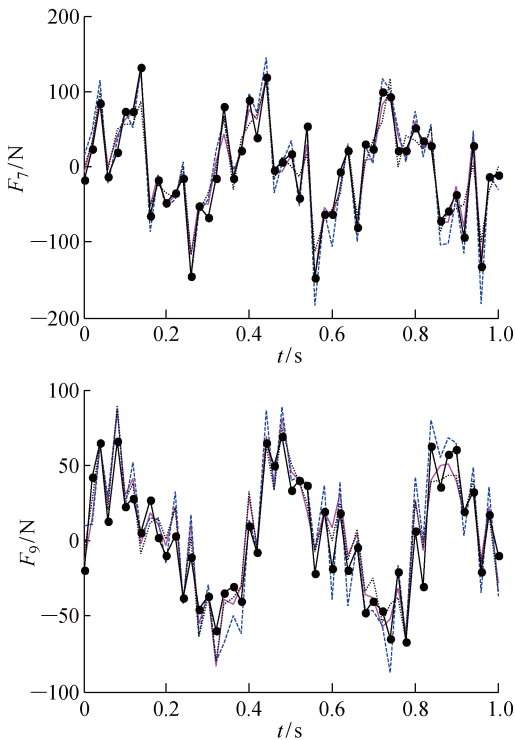
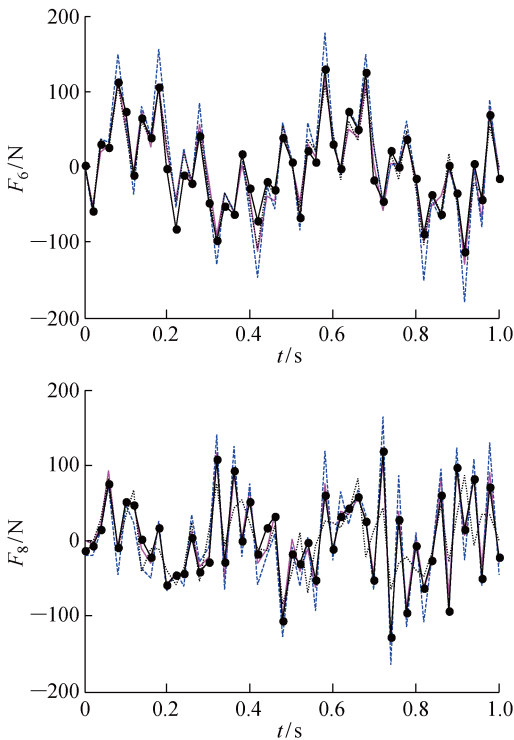


图 17 T3 中 L-Co 各点曲率计算结果
Fig. 17 Curvature values of L-Co in T3



— 最佳测点 + 改进 L 曲线, - - - 最佳测点 + SVD 法, —●— 最差测点 + 改进 L 曲线, 真实载荷

图 18 T3 载荷时间历程重构结果
Fig. 18 Force time history reconstruction of T3

表 3 T3 载荷识别误差
Tab. 3 Load identification error of T3

	$eF_6/\%$	$eF_7/\%$	$eF_8/\%$	$eF_9/\%$
最佳测点+改进 L 曲线	6.57	7.18	6.54	8.92
最佳测点+SVD 法	10.37	11.28	10.19	13.42
最差测点+改进 L 曲线	9.12	8.97	9.86	11.47

被识别激励时间历程曲线可以看出,本文算法重构的载荷与真实值的吻合程度显著高于其他两种对照算法,说明该算法具有优越的稳健性和抗噪性.由表 3 可知,本文算法的识别误差虽然比 T1 和 T2 稍高,但仍处于较低水平且明显低于对照算法.由于载荷数量较多,导致传递函数矩阵维数较大,即使选取最佳测点也有较强的病态性,从而引起 SVD 法的识别误差迅速增大,此时不同识别算法对精度的影响超过了测点的选取对精度的影响.

4 结 语

针对载荷识别中的不适定问题,在时域内建立了测点优选和改进的 L 曲线法相结合的算法.首先通过遍历所有测点组合找出条件数最小的传递函数矩阵,进而获得对应的最佳测点.然后在使用正则化方法反求输入载荷的过程中引入二次 B 样条函数对 L 曲线进行插值,从而获得了更加精确的正则化参数,并将该算法的载荷重构结果分别与最差测点识别结果以及 SVD 法识别结果作对比.数值算例结果表明,该方法可以有效减弱传递函数矩阵的病态性,并具有较强的稳健性和抗噪性,从而提高了载荷识别的精度.

参考文献:

[1] 傅志方,饶柱石,周海亭.一种动态载荷的识别方法[J].上海交通大学学报,1997,31(3):5-7.
FU Zhifang, RAO Zhushi, ZHOU Haiting. A method of dynamic load identification[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 1997, 31(3): 5-7.

[2] LAGE Y E, MAIA N M M, NEVES M M, *et al.* Force identification using the concept of displacement transmissibility[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(7): 1674-1686.

[3] MOVAHEDIAN B, BOROOMAND B. Inverse identification of time-harmonic loads acting on thin plates using approximated Green’s functions[J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2016, 24(8): 1475-1493.

[4] DOYLE J F. A wavelet deconvolution method for impact force identification[J]. Experimental Mechanics, 1997, 37(4): 403-408.

[5] 姜金辉,陈国平,张方.多点平稳随机载荷识别方法研究[J].振动工程学报,2009,22(2):162-167.
JIANG Jinhui, CHEN Guoping, ZHANG Fang. Identification method of multi-point stationary random load[J]. Journal of Vibration Engineering, 2009, 22(2): 162-167.

[6] 周林,郑四发,王彬星,等.动态载荷识别位置优化的传递函数相干法[J].振动工程学报,2011,24(1):14-19.
ZHOU Lin, ZHENG Sifa, WANG Binxing, *et al.* Coherence analysis method for dynamic force identification[J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(1): 14-19.

[7] 郭荣,房怀庆,裘剌,等.基于 Tikhonov 正则化及奇异值分解的载荷识别方法[J].振动与冲击,2014,33(6):53-58.
GUO Rong, FANG Huaqing, QIU Shan, *et al.* Novel load identification method based on the combination of Tikhonov regularization and singular value decomposition[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(6): 53-58.

[8] 马超,华宏星.基于改进正则化方法的状态空间载荷识别技术[J].振动与冲击,2015,34(11):146-149.
MA Chao, HUA Hongxing. State space load identification technique based on an improved regularized method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(11): 146-149.

[9] HANSEN P C, O’LEARY D P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1993, 14(6): 1487-1503.

[10] CASTELLANOS J, GÓMEZ S, GUERRA V. The triangle method for finding the corner of the L-curve[J]. Applied Numerical Mathematics, 2002, 43(4): 359-373.

[11] 江本赤. B 样条曲线曲率简易求解算法[J].制造技术与机床,2014(10):78-80.
JIANG Benchì. A simple solution algorithm for the curvature of B-spline curve[J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 2014(10): 78-80.

[12] LI X W, DENG Z M. Identification of dynamic loads based on second-order Taylor-series expansion method[J]. Shock and Vibration, 2016, 2016: 1-9.

(本文编辑:石易文)