第53卷 第10期
2019年10月

上 海 交 通 大 学 学 报
JOURNAL OF SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

Vol. 53 No. 10
Oct. 2019

文章编号:1006-2467(2019)10-1230-08　　DOI:10.16183/j.cnki.jsjtu.2019.10.013

独立不同分布不确定变量中心极限定理证明及其应用

孟祥飞，　王　瑛，　李　超，　亓　尧，　孙　贇
(空军工程大学 装备管理与无人机工程学院，西安 710051)

摘　要：针对不确定变量分布函数的问题，提出了两个不确定中心极限定理. 定义了不确定变量的特征函数并基于期望计算法则提出了特征函数的计算方法. 分析了不确定变量特征函数的性质. 将随机理论中的正态分布引入到不确定理论中，证实了该分布在形式上为一种正则不确定分布. 通过新型坦克射击测试的案例验证了所提定理的可行性和有效性.

关键词：不确定理论；独立不同分布变量；中心极限定理；特征函数
中图分类号：O 212　　　**文献标志码**：A

Central Limit Theorems Proving for Independent and Non-Identically Distributed Uncertain Variables and Its Application

MENG Xiangfei，　*WANG Ying*，　*LI Chao*，　*QI Yao*，　*SUN Yun*
(Equipment Management and Unmanned Aerial Vehicle Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: In order to determine the distribution of uncertain variables, two central limit theorems for independent and identical variables are proposed. Firstly, the characteristic function of uncertain variables is defined and its calculation formula is given based on the expected value of uncertain variables. Secondly, the properties of the characteristic function are analyzed and the normal distribution in probability theory is introduced into uncertainty theory. It is proved that the distribution can also be regarded as an uncertain one. Finally, an example of shooting accuracy of a new kind of tanks moving at a high speed is given to verify the feasibility and effectiveness of the proposed theorems.

Key words: uncertainty theory; independent and non-identically distributed uncertain variables; central limit theorem; characteristic functions

在对实际问题进行建模时，经常遇到研究对象处于动态复杂环境中的问题，导致所构建模型中的参数难以确定，此现象称为非决定性现象. 非决定性现象主要分为两类：① 随机现象，即有大量样本数据的非决定现象；② 带有专家信度的现象，即样本数据非常少或无法得到样本数据而只能依靠专家经验作出判断的现象.

通常采用概率论理论与方法解决随机型的非决定现象，而采用不确定理论解决带有专家信度的非决定现象. 解决非决定现象最重要的工作是确定随机变量或不确定变量的分布函数. 对于简单的分布函数，一般可用最小二乘法、矩估计法和 Delphi 法

收稿日期：2018-06-30
基金项目：国家自然科学基金(71571190,71601183)资助项目
作者简介：孟祥飞(1989-)，男，河北省邢台市人，博士生，主要研究方向为不确定多目标规划模型求解及应用.
通信作者：王　瑛，女，教授，博士生导师，电话(Tel.)：18133962570；E-mail：yingwangkgd@163.com.

等[1-2].但是对于一些特殊情况,上述方法则不再适用.例如,现实中有很多随机变量是由大量随机因素共同作用而形成的,且每个因素所起到的作用较小,即并非某一个因素起到决定性的作用.为解决这种多种随机因素作用的问题,法国数学家棣莫弗和拉普拉斯首先提出了中心极限定理并给出了证明[3-4].林德贝格、李雅普诺夫及马尔科夫等对该定理进行了更深入的研究.中心极限定理表明,这种随机变量服从的概率分布往往会收敛到一类共同分布,即正态分布.同时,该定理提供了一种近似确定独立随机变量之和分布的近似方法[5].

目前,不确定理论中尚未提出中心极限定理.因此,尚无较好的处理多不确定因素共同作用问题的方法.文献[6]所构建的不确定多目标规划模型将部件的修复率和故障率等参数作为不确定变量,解决了数据缺失条件下可修复系统的冗余分配问题.文献[7-8]所建模型将交易价格、供应量和需求量作为不确定变量,讨论了不确定环境下多目标股票交易问题.此外,因雷暴等恶劣天气造成航班延误,在处理航班延误的恢复问题时,航班重新出发的时间是一个多因素共同作用的不确定变量问题.在天气好转之前,航班可能无法恢复,而当天气达到起飞或降落条件之后,空管部门可能会对空中交通流量实施管控,导致延误航班仍停留在机场无法执行任务.而飞机机械故障、乘客原因以及机组失误等原因共同造成的航班延误更加难以恢复,签派员只能根据经验进行适当调整[9-11].又如,新型坦克的射击精度受到坦克行驶速度、路面状况、车载武器系统和瞄准系统的小规模震动、底盘线震动以及坦克内部的空间结构设计等因素的影响,凭经验很难估计坦克多次射击的结果.大量文献中不确定变量是受诸多不确定因素的影响[12-18],为简化计算,这些研究直接给定不确定变量分布或根据经验数据拟合其分布,而难以描述多不确定因素对事件所造成的影响.

基于此,本文主要研究不确定理论中的中心极限定理.首先,定义不确定分布的特征函数并分析该定理具有的部分性质.其次,将概率论中的正态分布引入到不确定理论中,提出两个中心极限定理并予以证明.

1　不确定变量特征函数定义及其性质

本文借鉴概率论中随机变量特征函数的概念,提出不确定变量的特征函数.

定义 1　设 ξ 为不确定变量,则对于任意实数 x,函数 $\Phi(x)=M\{\xi\leqslant x\}$ 为 ξ 的不确定分布,$M\{\xi\leqslant x\}$ 为测度函数.

定义 2　函数 $\Phi(x)$ 为一个正则不确定分布,当且仅当其为一个不满足 $\Phi(x)\equiv 1$ 或 $\Phi(x)\equiv 0$ 的严格单调递增函数.

定义 3　设 ξ 是一个不确定变量且服从正则不确定分布,则记 $\Phi(x)$ 的反函数 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 为不确定变量 ξ 的不确定逆分布.其中 α 为信度,$0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

定义 4　对于 ξ,其期望值为

$$E(\xi)=\int_0^{+\infty}M\{\xi\geqslant x\}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}M\{\xi\leqslant x\}\mathrm{d}x$$

其中两个积分中至少有一个是有限的.若 ξ 的期望值存在,则有 $E(\xi)=\int_0^1\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

定义 5　ξ 服从正则不确定分布 $\Phi(x)$,则称 $\varphi(t)$ 为 $\Phi(x)$ 或 ξ 的特征函数,$\varphi(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi})$,$-\infty<t<+\infty$,其中 t 为实数;i 为虚数单位.

根据定义 4,$\Phi(x)$ 或 ξ 的特征函数可表示为

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}\Phi(x)=\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Phi^{-1}(\alpha)}\mathrm{d}\alpha,\quad -\infty<t<+\infty \tag{1}$$

由此可见,不确定变量的特征函数取决于其服从的分布函数,若分布函数相同则特征函数必定相同.ξ 的特征函数具有以下性质:

性质 1　对于任意 t,有 $|\varphi(t)|\leqslant\varphi(0)=1$.

证明　根据欧拉公式可得:

$$|\varphi(t)|=\left|\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Phi^{-1}(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right|\leqslant\int_0^1\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Phi^{-1}(\alpha)}\right|\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\left|\Phi^{-1}(\alpha)\cos t+\mathrm{i}\Phi^{-1}(\alpha)\sin t\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x=\varphi(0)=1$$

性质 2　ξ,η 为不确定变量,若 ξ 与 η 相互独立,则 $\varphi_{\xi+\eta}(t)=\varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$.

证明　根据文献[16],$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta}$ 为不确定变量且相互独立,于是有

$$\varphi_{\xi+\eta}(t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\xi+\eta)}]=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta})=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi})E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta})=\varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$$

性质 3　ξ 服从正则不确定分布,其特征函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明　对于任意实数 $t,h,a(0<a<1)$,有

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|=\left|\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+h)\Phi^{-1}(\alpha)}\mathrm{d}\alpha-\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Phi^{-1}(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right|=$$

$$\left|\int_0^1 e^{it\Phi^{-1}(\alpha)}(e^{ih\Phi^{-1}(\alpha)}-1)d\alpha\right|\leqslant$$
$$\int_0^1 |e^{it\Phi^{-1}(\alpha)}||(e^{ih\Phi^{-1}(\alpha)}-1)|d\alpha$$

根据性质1,有

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\int_0^1|[e^{ih\Phi^{-1}(\alpha)}-1]|d\alpha=$$
$$\int_0^a|[e^{ih\Phi^{-1}(\alpha)}-1]|d\alpha+\int_a^1|[e^{ih\Phi^{-1}(\alpha)}-1]|d\alpha$$

可设定一个充分大的 a,必存在正实数 ε,使得 $\int_a^1|(e^{ih\Phi^{-1}(\alpha)}-1)|d\alpha<\frac{\varepsilon}{2}$. 对于任意的 $\alpha\in[0,a]$,取实数 $\delta=\frac{\varepsilon}{2|\Phi^{-1}(a)|}$,当 $|h|<\delta$ 时,有

$$|e^{ih\Phi^{-1}(\alpha)}-1|=$$
$$|e^{i\frac{h}{2}\Phi^{-1}(\alpha)}[e^{i\frac{h}{2}\Phi^{-1}(\alpha)}-e^{-i\frac{h}{2}\Phi^{-1}(\alpha)}]|=$$
$$2\left|\sin\frac{h\Phi^{-1}(\alpha)}{2}\right|\leqslant2\left|\frac{h\Phi^{-1}(\alpha)}{2}\right|<$$
$$h\Phi^{-1}(\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}$$

对任意 $t\in(-\infty,+\infty)$,有

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\int_0^a\frac{\varepsilon}{2}d\alpha+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{(1+a)}{2}\varepsilon<\varepsilon$$

即 $\varphi(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 在一致连续.

性质4 ξ 服从正则不确定分布,其特征函数对于任意的 $x_1<x_2$,有 $\left|\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\right|\leqslant x_2-x_1$.

证明 对于 $a\geqslant0$,根据性质1,有

$$|e^{ia}-1|=\left|\int_0^a e^{ix}dx\right|\leqslant\int_0^a|e^{ix}|dx\leqslant a$$

对于 $a<0$,有

$$|e^{ia}-1|=$$
$$|e^{ia}(e^{i|a|}-1)|\leqslant|e^{ia}||e^{i|a|}-1|\leqslant$$
$$|e^{i|a|}-1|\leqslant|a|$$

对于任意 a,有

$$|e^{ia}-1|\leqslant|a| \tag{2}$$

于是

$$\left|\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\right|=\left|\frac{e^{-itx_1}[1-e^{-it(x_2-x_1)}]}{it}\right|=$$
$$\left|\frac{ite^{-itx_1}[1-e^{-it(x_2-x_1)}]}{-t}\right|\leqslant$$
$$|i||e^{-itx_1}||1-e^{-it(x_2-x_1)}|\leqslant x_2-x_1$$

性质5 ξ 服从正则不确定分布,其特征函数对于任意的 $x_1<x_2$ 及正实数 T,有 $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$.

证明 根据特征函数的定义有

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt=$$
$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{itx}d\Phi(x)dt$$

根据性质3及4,交换积分次序,有

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left[\frac{e^{it(x-x_1)}-e^{-it(x-x_1)}}{it}-\frac{e^{it(x-x_2)}-e^{-it(x-x_2)}}{it}\right]dtd\Phi(x)=$$
$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]dtd\Phi(x)$$

由狄利克雷积分,可知

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\frac{\sin at}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & a>0\\ 0, & a=0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & a<0\end{cases}$$

记

$$S(T,x,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^T\left[\frac{(x-x_1)\sin t}{t}-\frac{(x-x_2)\sin t}{t}\right]dt$$

则

$$\lim_{T\to+\infty}S(T,x,x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x<x_1\text{或}x>x_2\\ \dfrac{1}{2}, & x=x_1\text{或}x=x_2\\ 1, & x_1<x<x_2\end{cases}$$

因此必存在 $O>0$,使得 $|S(T,x,x_1,x_2)|<O$,即 $S(T,x,x_1,x_2)$ 有界. 于是有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\left[\frac{(x-x_1)\sin t}{t}-\frac{(x-x_2)\sin t}{t}\right]dtd\Phi(x)=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to+\infty}S(T,x,x_1,x_2)d\Phi(x)=$$
$$\int_{x_1+\nu}^{x_2-\nu}\lim_{T\to+\infty}S(T,x,x_1,x_2)d\Phi(x)$$

其中:ν 为充分小的正数. 则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\left[\frac{(x-x_1)\sin t}{t}-\frac{(x-x_2)\sin t}{t}\right]dtd\Phi(x)=$$
$$\int_{x_1+\nu}^{x_2-\nu}1d\Phi(x)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

$$\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$

性质6 ξ 服从正则不确定分布函数,其特征函数唯一确定.

证明 由性质3及5可得

$$\lim_{\Delta x\to0}\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

由式(2)可得

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}\right|=\frac{1}{|t\Delta x|}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}\right|\leqslant \frac{|-t\Delta x|}{|t\Delta x|}=1$$

考虑到$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|\mathrm{d}t<+\infty$，于是可交换式(3)中积分和极限的次序，则

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\\&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\varphi(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4}$$

由式(4)可知，$\Phi(x)$ 在 x 处的增量 $\Delta\Phi(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$ 仅与 $\varphi(t)$ 有关，再结合 $\Phi(-\infty)=0$，有

$$\Phi(x)=\Phi(-\infty)+\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\Phi(x_i) \tag{5}$$

式中：N 为足够大的正整数；$x_1>x_2>\cdots>x_N$ 且 $\lim\limits_{N\to+\infty}x_N=-\infty$.

根据性质 5，对 $\Phi(x)$ 上每一个连续点 x，当 y 沿着 $\Phi(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，有

$$\Phi(x)=\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}}{\mathrm{i}t}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

综合考虑式(5)及(6)，可知不确定分布函数在任意 x 处的取值由其连续点上的值 x 及其特征函数决定，即不确定分布函数具有唯一确定的特征函数.

2　独立不同分布不确定中心极限定理

定理 1　$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}s$，$-\infty<x<+\infty$ 是一类不确定分布函数，其中 s，μ 以及 σ 为常数，$\sigma>0$.

证明　对 $\Phi(x)$ 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}>0,\quad -\infty<x<+\infty$$

即 $\Phi(x)$ 关于 x 单调递增，并且 $\Phi(x)$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上连续.

令 $t=\frac{s-\mu}{\sigma}$，则 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，$-\infty<x<+\infty$. 记实数 $K=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，则 $K^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2+u^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u$，利用极坐标进行转换，有

$$K^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}\theta=2\pi$$

式中：r 和 θ 为极坐标参数，均为正实数.

考虑 $K>0$，则 $K=\sqrt{2\pi}$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1$$

则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0$. 即 $0\leqslant\Phi(x)\leqslant 1$.

综上所述，$\Phi(x)$ 为正则不确定分布函数，记为 $G(\mu,\sigma^2)$ 分布.

定理 2　林德贝格中心极限定理：若独立不确定变量序列 ξ_1，ξ_2 以及 ξ_n 分别服从正则不确定分布 $\Phi_i(x)$，且 $E(\xi_i)=\mu_i$，$V(\xi_i)=\sigma_i^2$，$B_n^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2$. 令 $\eta_i=\xi_i-\mu_i$，η_i 服从的正则不确定分布为 $\Psi_i(x)$. 若满足林德贝格条件，即 $\forall\tau>0$，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\Psi^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\Psi^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}=0$$

则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to+\infty}M\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

证明　根据式(2)可知 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1|\leqslant|a|$.

当 $a=0$ 时有

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1-\mathrm{i}a|=|1-1|=0\leqslant a^2/2$$

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1-\mathrm{i}a+a^2/2|=|1-1|=0\leqslant a^3/6$$

当 $a>0$ 时有

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1-\mathrm{i}a|=\left|\int_0^a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1|\mathrm{d}x \tag{7}$$

根据泰勒展开式 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$，式(7)可转化为

$$\begin{aligned}&|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1-\mathrm{i}a|\leqslant\int_0^a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1|\mathrm{d}x=\\&\int_0^a|1+\mathrm{i}x+o(x)-1|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^a|x|\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

式中：$o(x)$ 为 x 的高阶无穷小.

同理

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1-\mathrm{i}a+\frac{a^2}{2}\right|\leqslant\int_0^a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1-\mathrm{i}x|\mathrm{d}x=\\&\int_0^a\left|1+\mathrm{i}x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-\mathrm{i}x\right|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^a\left|\frac{x^2}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{a^3}{6}\end{aligned}$$

当 $a<0$ 时,有

$$\left|e^{ia}-1-ia\right|=\left|\int_a^0(1-e^{ix})\,dx\right|\leqslant \int_0^{|a|}\left|e^{ix}-1\right|dx\leqslant\frac{a^2}{2}$$

$$\left|e^{ia}-1-ia+\frac{a^2}{2}\right|=\left|\int_a^0(1+ix-e^{ix})\,dx\right|\leqslant \int_0^{|a|}\left|e^{ix}-1-ix\right|dx\leqslant\frac{|a|^3}{6}$$

综上,对于任意的实数 a,有

$$\left|e^{ia}-1-ia\right|\leqslant\frac{a^2}{2}\tag{8}$$

$$\left|e^{ia}-1-ia+\frac{a^2}{2}\right|\leqslant\frac{|a|^3}{6}\tag{9}$$

令 $\eta_{ni}=\dfrac{\eta_i}{B_n}$,$\varphi_{ni}(t)$ 为 η_{ni} 的特征函数,$\Psi_{ni}(x)$ 为 η_{ni} 的分布函数,根据不确定变量期望和方差的运算法则,有

$$E(\eta_{ni})=E\left(\frac{\eta_i}{B_n}\right)=E\left(\frac{\xi_i-\mu_i}{B_n}\right)=0\tag{10}$$

$$V(\eta_{ni})=E\left(\frac{\eta_i}{B_n}\right)=\frac{V(\eta_i)}{B_n^2}= V\left(\frac{\xi_i-\mu_i}{B_n}\right)=\frac{V(\xi_i)}{B_n^2}\tag{11}$$

根据式(10)及(11),有

$$\sum_{i=1}^{n}V(\eta_{ni})=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,d\Phi_{ni}(x)= \sum_{i=1}^{n}\int_0^1\left[\frac{\Psi_i^{-1}(\alpha)}{B_n}\right]^2d\alpha=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}V(\eta_i)}{B_n^2}= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}V(\xi_i)}{B_n^2}=1\tag{12}$$

根据积分运算法则,有

$$\frac{1}{B_n^2}\left\{\int_0^{\Psi_i(-\tau B_n)}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2d\alpha+\int_{\Psi_i(\tau B_n)}^1[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2d\alpha\right\}= \int_0^{\Psi_i(-\tau B_n)}\left[\frac{\Psi_i^{-1}(\alpha)}{B_n}\right]^2d\alpha+\int_{\Psi_i(\tau B_n)}^1\left[\frac{\Psi_i^{-1}(\alpha)}{B_n}\right]^2d\alpha\tag{13}$$

进一步简化,得

$$\frac{1}{B_n^2}\left\{\int_0^{\Psi_i(-\tau B_n)}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2d\alpha+\int_{\Psi_i(\tau B_n)}^1[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2d\alpha\right\}= \int_0^{\Psi_{ni}(-\tau)}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2d\alpha+\int_{\Psi_{ni}(\tau)}^1[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2d\alpha$$

于是林德贝格条件转化为:$\forall\tau>0$,有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_{ni}(-\tau)}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2d\alpha+ \int_{\Psi_{ni}(\tau)}^1[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2d\alpha\right\}=0\tag{14}$$

即在式(14)的条件下证明

$$\lim_{n\to+\infty}M\left\{\sum_{i=1}^{n}\eta_{ni}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

根据性质2,$\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_{ni}$ 的特征函数为

$$\varphi_n(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{ni}(t)\tag{15}$$

则有

$$\ln\varphi_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\ln\varphi_{ni}(t)\tag{16}$$

根据式(10),有

$$\varphi_{ni}(t)-1=\int_0^1\left[e^{it\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)}-1-it\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)\right]d\alpha\tag{17}$$

根据式(8),式(17)可化为

$$\left|\varphi_{ni}(t)-1\right|\leqslant\frac{t^2}{2}\int_0^1[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2d\alpha= \frac{t^2}{2}V(\eta_{ni})=\frac{V(\eta_i)t^2}{2B_n^2}\tag{18}$$

其中:$1\leqslant i\leqslant n$.

根据式(18)可知,$\forall t\in[-T,T]$,有

$$\left|\varphi_{ni}(t)-1\right|\leqslant\frac{V(\eta_i)T^2}{2B_n^2}$$

则有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\varphi_{ni}(t)-1\right|\leqslant\frac{V(\eta_i)T^2}{2B_n^2}\tag{19}$$

当 n 充分大时,根据式(19)有

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\varphi_{ni}(t)-1\right|=0\tag{20}$$

由式(20)可知存在正整数 M,当 $n\geqslant M$ 时有

$$\left|\varphi_{ni}(t)-1\right|<\frac{1}{2}\tag{21}$$

因此,在任意区间$[-T,T]$,式(16)可展开为

$$\ln\varphi_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\ln\varphi_{ni}(t)= \sum_{i=1}^{n}\ln[1+\varphi_{ni}(t)-1]= \sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ni}(t)-1]+W_n(t)\tag{22}$$

式中:$W_n(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{l=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{l-1}}{l}[\varphi_{ni}(t)-1]^l$,$l$ 为正整数.

由式(21)可得

$$W_n(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=2}^{+\infty}\frac{1}{2}[\varphi_{ni}(t)-1]^l= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=2}^{+\infty}\frac{[\varphi_{ni}(t)-1]^2}{2-\varphi_{ni}(t)}\leqslant \sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ni}(t)-1]^2\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}[\varphi_{ni}(t)-1]\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ni}(t)-1]$$

由式(12)及(18)可得

$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ni}(t)-1]\leqslant\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha=\frac{t^2}{2}$$

因此，有 $W_n(t)\leqslant\frac{t^2}{2}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\varphi_{ni}(t)-1]$. 由式(20)可知，$\forall t\in[-T,T]$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n(t)=0$. 于是式(22)转化为

$$\ln\varphi_n(t)=\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ni}(t)-1] \tag{23}$$

令 $\Gamma_n(t)=\frac{t^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)}-1-\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]\mathrm{d}\alpha$，则由式(17)可得

$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ni}(t)-1]=\Gamma_n(t)-\frac{t^2}{2} \tag{24}$$

由式(12)可知 $\frac{t^2}{2}=-\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{[\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2}{2}\mathrm{d}\alpha$. 对于任意的 τ，有

$$\begin{aligned}\Gamma_n(t)=&\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)}-1-\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)+\frac{t^2[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2}{2}\right\}\mathrm{d}\alpha+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}^{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)}-\right.\\&\left.1-\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)-\frac{[\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2}{2}\right\}\mathrm{d}\alpha+\\&\sum_{i=1}^{n}\int_{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}^{1}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)}-1-\mathrm{i}t\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)+\frac{t^2[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2}{2}\right\}\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

由式(2)及(8)可得

$$\begin{aligned}|\Gamma_n(t)|=&\frac{|t|^3}{6}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}^{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}|\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)|^3\mathrm{d}\alpha+\\&t^2\sum_{i=1}^{n}\{\int_0^{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\\&\int_{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}^{1}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\}\end{aligned} \tag{25}$$

当 τ 足够小时，必存在正实数 ρ，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}^{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}|\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)|^3\mathrm{d}\alpha<\rho$$

式(25)可化为

$$|\Gamma_n(t)|\leqslant\frac{|t|^3}{6}\rho+t^2\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}^{1}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}$$

由式(12)可知，$\forall t\in[-T,T]$，有

$$|\Gamma_n(t)|\leqslant\frac{T^3}{6}\rho+T^2\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}^{1}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}$$

$\forall\lambda>0$，必有 $\rho>0$，使得 $\frac{T^3}{6}\rho<\frac{\lambda}{2}$，$\lambda$ 为正实数.

由式(14)林德贝尔条件，存在正整数 A 及对应的 $\rho>0$，当 $n\geqslant A$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\Psi_{ni}^{-1}(-\tau)}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Psi_{ni}^{-1}(\tau)}^{1}[\Psi_{ni}^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha<\frac{\lambda}{2T^2}$$

于是，$\forall t\in[-T,T]$，有

$$|\Gamma_n(t)|<\lambda \tag{26}$$

根据式(26)，当 λ 取足够小的正实数时，有

$$\lim_{n\to+\infty}|\Gamma_n(t)|=0.$$

于是式(24)转化为

$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ni}(t)-1]=-\frac{t^2}{2} \tag{27}$$

根据式(23)及(27)可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

根据定理 1，有

$$\lim_{n\to+\infty}M\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

定理 3　李雅普诺夫中心极限定理：若独立不确定变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 分别服从正则不确定分布 $\Phi_i(x)$，且 $E(\xi_i)=\mu_i,V(\xi_i)=\sigma_i^2>0,B_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$. 令 $\eta_i=\xi_i-\mu_i$，η_i 服从的正则不确定分布为 $\Psi_i(x)$. 若满足李雅普诺夫条件，即存在实数 $\kappa>0$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^{2+\kappa}}\sum_{i=1}^{n}E(|\xi_i-\mu_i|^{2+\kappa})=0$$

则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to+\infty}M\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

证明　易知 $B_n^2>0$，$(\Psi_i^{-1}(\alpha))^2\geqslant0$，于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}\geqslant0 \tag{28}$$

必存在实数 $\kappa>0$ 及足够小的正实数 τ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}\leqslant\\&\frac{1}{B_n^2(\tau B_n)^{\kappa}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^{2+\kappa}\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^{2+\kappa}\mathrm{d}\alpha\right\}\leqslant\\&\frac{1}{B_n^2(\tau B_n)^{\kappa}}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1[\Psi_i^{-1}(\alpha)]^{2+\kappa}\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

根据不确定变量 k 阶矩计算公式有

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}\leqslant \frac{1}{\tau^{\kappa}}\frac{1}{B_n^{2+\kappa}}\sum_{i=1}^{n}E(\eta_i)^{2+\kappa}=\frac{1}{\tau^{\kappa}}\frac{1}{B_n^{2+\kappa}}\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i-\mu_i)^{2+\kappa}\tag{29}$$

根据式(29)有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}\leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\tau^{\kappa}}\frac{1}{B_n^{2+\kappa}}\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i-\mu_i)^{2+\kappa}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{B_n^{2+\kappa}}\sum\limits_{i=1}^{n}E(|\xi_i-\mu_i|^{2+\kappa})=0$,则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}\leqslant 0\tag{30}$$

根据式(28)及式(30)有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\Psi_i^{-1}(-\tau B_n)}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha+\int_{\Psi_i^{-1}(\tau B_n)}^{1}[\boldsymbol{\Psi}_i^{-1}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha\right\}=0$$

根据定理 3 有

$$\lim_{n\to+\infty}M\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

3 案例分析

新型坦克在装备之前需经过多次射击进行测试,某场测试中,按难易程度共设置 10 种标靶,每种标靶的数量为 1.

对于高速运动的坦克,车载武器系统和瞄准系统会随着坦克的运动而发生小规模震动,尤其当路况较差的时候,射击命中率会明显下降.此外,底盘线震动会引起横向射击偏差且对瞄准镜的成像质量有一定的影响.另外,坦克内部的空间结构设计可能使得操作员难以精确操纵瞄准设备,进而影响瞄准效果.假设该坦克命中第 1 种标靶的信度为 1,命中第 2 种标靶的信度为 0.9,以此类推,命中第 i 种标靶的信度为 $1-\dfrac{i}{10}$, $i=1,2,\cdots,10$.假如各种标靶之间相互独立,并且至少命中其中 6 个标靶才算通过测试.

记事件 γ_{i1} 为该坦克命中第 i 种标靶,事件 γ_{i0} 为该坦克未命中第 i 种标靶.定义不确定变量 ξ_i 如下:

$$\xi_i(\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma=\gamma_{i1}\\ 0, & \gamma=\gamma_{i0}\end{cases}$$

则计算该坦克通过测试的信度就可以转化为计算 $M(\sum\limits_{i=1}^{10}\xi_i\geqslant 6)$.

根据 $M(\gamma_{i1})=1-\dfrac{i-1}{10}$, $M(\gamma_{i0})=\dfrac{i-1}{10}$,则 ξ_i 的期望为

$$\mu_i=E(\xi_i)=\int_0^{+\infty}M\{\xi_i\geqslant x\}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}M\{\xi_i\leqslant x\}\mathrm{d}x=\int_0^1M\{\xi_i\geqslant x\}\mathrm{d}x=\int_0^1M(\gamma_{i1})\mathrm{d}x=M(\gamma_{i1})=1-\frac{i-1}{10}$$

ξ_i 的方差为

$$\sigma_i^2=E(\xi_i^2)-E^2(\xi_i)=\int_0^1M\{\xi_i^2\geqslant x\}\mathrm{d}x-M(\gamma_{i1})^2=M(\gamma_{i1})-(\gamma_{i1})^2=M(\gamma_{i1})(1-\gamma_{i1})=M(\gamma_{i1})M(\gamma_{i0})=\left(1-\frac{i-1}{10}\right)\frac{i-1}{10}$$

易知从 ξ_{11} 开始的不确定变量都与 ξ_{10} 同分布且相互独立.当 $\kappa=1$ 时,验证不确定变量序列 $\{\xi_n\}$ 满足李雅普诺夫条件,有

$$B_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}M(\gamma_{i1})M(\gamma_{i0})}$$

$$E(|\xi_i-\mu_i|^3)=M(\gamma_{i1})^3M(\gamma_{i0})+M(\gamma_{i1})M(\gamma_{i0})^3\leqslant M(\gamma_{i1})M(\gamma_{i0})$$

于是有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}E(|\xi_i-\mu_i|^3)\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}M(\gamma_{i1})M(\gamma_{i0})\right]^{-1/2}=0$$

即 $\{\xi_n\}$ 满足李雅普诺夫条件,可以使用定理 3.

又因为

$$E\left(\sum_{i=1}^{10}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{10}M(\gamma_{i1})=\sum_{i=1}^{10}\left(1-\frac{i-1}{10}\right)=5.5$$

$$B_{10}^2=\sum_{i=1}^{10}V(\xi_i)=\sum_{i=1}^{10}\left(1-\frac{i-1}{10}\right)\left(\frac{i-1}{10}\right)=1.9$$

所以该坦克通过测试的信度为

$$M\left(\sum_{i=1}^{10}\xi_i\geqslant 6\right)=M\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}\xi_i-5.5}{\sqrt{1.9}}\geqslant\frac{6-5.5}{\sqrt{1.9}}\right\}\approx 1-\Phi(0.3627)=1-0.6406=0.3594$$

由此看出，该坦克通过测试的信度约为 0.36，信度较低. 坦克射击精度测试需对不同类型的标靶进行瞄准射击，测试的总成绩与每一次射击结果密切相关，而且坦克的射击精度受自身性能及外部环境等不确定因素的影响，若专家根据经验无法对坦克通过测试这一事件进行较准确的估计. 因此，在处理该问题时，首先需利用不确定中心极限定理确定坦克通过测试这一事件服从的不确定分布，然后再进行分析计算.

4　结语

本文针对独立不同分布的不确定变量提出中心极限定理. 首先定义了不确定分布的特征函数并给出了计算法则. 然后将随机理论中的正态分布引入到不确定理论并证明该分布的函数形式可以作为一个不确定分布. 在此基础上，提出了两个独立不同分布的不确定中心极限定理，可为不确定理论在现实问题中的应用起到一定的促进作用.

参考文献：

[1] PENG Z, IWAMURA K. A sufficient and necessary condition of uncertainty distribution [J]. **Journal of Interdisciplinary Mathematics**, 2010, 13(3): 277-285.

[2] WANG X, GAO Z, GUO H. Delphi method for estimating uncertainty distributions [J]. **International Journal on Information**, 2012, 15(2): 449-460.

[3] DOLGOPYAT D, GOLDSHEID I. Central limit theorem for recurrent random walks on a strip with bounded potential [J]. **Nonlinearity**, 2018, 31(7): 3381-3412.

[4] BENOIST Y, QUINT J F. Central limit theorem for linear groups[J]. **The Annals of Probability**, 2016, 44(2): 1308-1340.

[5] O'ROURKE S, RENFREW D. Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of elliptic random matrices[J]. **Journal of Theoretical Probability**, 2016, 29(3): 1121-1191.

[6] GUO J, WANG Z, ZHENG M, *et al*. Uncertain multiobjective redundancy allocation problem of repairable systems based on artificial bee colony algorithm [J]. **Chinese Journal of Aeronautics**, 2014, 27(6): 1477-1487.

[7] LIU L, ZHANG B, MA W. Uncertain programming models for fixed charge multi-item solid transportation problem [J]. **Soft Computing**, 2018, 22(17): 5825-5833.

[8] DALMAN H. Uncertain programming model for multi-item solid transportation problem [J]. **International Journal of Machine Learning and Cybernetics**, 2018, 9(4): 559-567.

[9] CHEN X. Uncertain calculus with finite variation processes [J]. **Soft Computing**, 2015, 19(10): 2905-2912.

[10] LIU B, CHEN X. Uncertain multiobjective programming and uncertain goal programming [J]. **Journal of Uncertainty Analysis and Applications**, 2015, 3(1): 1-8.

[11] LIU B, YAO K. Uncertain multilevel programming: Algorithm and applications [J]. **Computers & Industrial Engineering**, 2015, 89: 235-240.

[12] PENG J. Risk metrics of loss function for uncertain system [J]. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 2013, 12(1): 53-64.

[13] ZHANG Z, LIU W. Geometric average Asian option pricing for uncertain financial market [J]. **Journal of Uncertain Systems**, 2014, 8(4): 317-320.

[14] WANG X, PENG Z. Method of moments for estimating uncertainty distributions [J]. **Journal of Uncertainty Analysis and Applications**, 2014, 2(1): 1-10.

[15] NING Y, CHEN X, WANG Z, *et al*. An uncertain multi-objective programming model for machine scheduling problem [J]. **International Journal of Machine Learning and Cybernetics**, 2016, 8(5): 1493-1500.

[16] LI R, LIU G. An uncertain goal programming model for machine scheduling problem [J]. **Journal of Intelligent Manufacturing**, 2017, 28(3): 689-694.

[17] 王族统. 基于不确定理论的多目标规划方法及其应用研究[D]. 西安：空军工程大学，2015.
WANG Zutong. Research on multi-objective programming and apply based on uncertainty theory [D]. Xi'an: Air Force Engineering University, 2015.

[18] LIU B. Uncertain random graph and uncertain random network [J]. **Journal of Uncertain Systems**, 2014, 8(1): 3-12.

（本文编辑：陈晓燕）