

文章编号: 1006-2467(2019)10-1225-05

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2019.10.012

# 基于损伤累积模型的可靠度保守估计方法

丁 然, 李 强

(北京交通大学 机械与电子控制工程学院, 北京 100044)

**摘 要:** 提出一种通过代数和计算可靠度保守估计的方法, 导出了损伤服从不同分布时可靠度保守估计的条件. 结合应用实例, 对比本文计算结果和 Monte-Carlo 模拟结果, 验证了本文所提方法的可行性与合理性.

**关键词:** 疲劳寿命分析; 损伤累积模型; 可靠度估计; 中心极限定理

**中图分类号:** O 346.5 **文献标志码:** A

## Method in Conservative Estimation of Reliability Based on Damage Accumulation Model

DING Ran, LI Qiang

(School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** A method in estimating the conservative reliability by calculating algebraic sum of damage is proposed. The conditions that this method could be used to get the conservative estimation is calculated for several distributions. Combined with application examples, the feasibility and rationality of this method are validated by comparing the results of this method and Monte-Carlo simulation.

**Key words:** fatigue life analyses; damage accumulation model; reliability estimation; central limit theorem

为评估随机载荷或多级载荷作用下零部件的疲劳寿命, 研究者建立了许多损伤累积模型<sup>[1-5]</sup>, 其中 Miner 线性损伤累积模型的应用最为广泛. 这些损伤模型的共同特点是基于实验数据或理论推导先给出第  $i$  级载荷循环作用  $n$  次时损伤的分布  $D_i \sim D_i(n)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), 并假设各级应力下的损伤相互独立, 则总损伤为各级载荷损伤的和, 即  $D = \sum_{i=1}^k D_i$ . 由于每级  $D_i$  为随机变量, 其求和涉及卷积运算, 所以通常用中心极限定理进行和分布的近似计算.

理论上, 中心极限定理是对载荷谱级数  $k \rightarrow \infty$  时和分布的近似, 但实际应用中载荷谱通常只有 8 级或 16 级. 若近似计算产生非保守误差, 在可靠度要求较高的场合, 该计算方法的应用受到限制. 而分析中心极限定理的近似误差保守与否通常存在一定的困难. 另一方面, 为获得每级载荷下的损伤分布, 可能需要用额外的实验数据进行参数估计. 但可靠性问题通常关注的是拖尾, 即高可靠度区的损伤分布特性, 并非均值附近的分布特征. 这意味着需要大样本的数据才能获得高置信度的参数估计.

针对上述问题, 本文提出一种通过代数和对损

收稿日期: 2018-06-07

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(11790281)

作者简介: 丁 然 (1989-), 男, 北京市人, 博士生, 主要研究方向为疲劳可靠性.

通信作者: 李 强, 男, 教授, 博士生导师, 电话(Tel.): 13911394919; E-mail: qli3@bjtu.edu.cn.

伤或疲劳寿命可靠度进行保守估计的方法. 损伤分布已知时,此方法可直接用于概率损伤模型;损伤分布未知时,此方法可基于一般的  $P$ - $S$ - $N$  ( $P$  为失效率, $S$  为应力幅, $N$  为寿命)曲线进行总损伤计算,从而避免额外的参数估计. 本文方法计算简便且可得到保守的可靠度估计,便于工程应用,但通常只能对高可靠度区损伤或寿命的可靠度进行保守估计.

1 可靠度的保守估计条件

设  $D$  为随机变量,则其可靠度  $R$  的估计值  $d$  满足  $P(D \leq d) = R$  ( $P$  为概率),即  $d$  是  $D$  的  $R$  可靠损伤. 如果  $P(D \leq d) \geq R$ ,则称  $d$  是  $R$  可靠损伤的保守估计,或  $R$  是  $d$  的可靠度的保守估计,下文均采用后一种说法.

一个损伤累积模型可给出保守估计是指该模型满足如下条件:给出各级载荷下  $R$  可靠损伤的保守估计  $d_i$ ,则总损伤  $d = \sum d_i$  也为保守估计,即

$$P(D_i \leq d_i) \geq R \Rightarrow$$
$$P(D \leq \sum_{i=1}^k d_i) \geq R \tag{1}$$

下面讨论式 (1) 成立的条件.

先讨论两级加载,即  $k = 2$  的情况. 设  $D_i$  的累积分布函数 (Cumulative Distribution Function, CDF) 和概率密度函数 (Probability Density Function, PDF) 分别为  $F_i(x)$  和  $f_i(x)$ ,且两级损伤相互独立. 则  $D$  的 CDF 可利用全概率公式计算:

$$F(d) = P(D_1 + D_2 \leq d) =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{d-x} f_2(y) dy \tag{2}$$

因  $F_i(x)$  是单调函数,令  $u = F_1(x), v = F_2(y)$ ,则  $du = f_1(x) dx, dv = f_2(y) dy$ . 取  $d = d_1 + d_2$ ,代入式 (2) 得

$$F(d_1 + d_2) = \int_0^1 \int_0^{F_2[d_1 + d_2 - F_1^{-1}(u)]} \frac{f_1(x)f_2(y)}{f_1(x)f_2(y)} du dv =$$
$$\int_0^1 F_2[d_1 + d_2 - F_1^{-1}(u)] du \tag{3}$$

式 (3) 表明  $D \leq d_1 + d_2$  的概率等于  $Ouv$  平面内被积函数下方区域的面积,如图 1 中的阴影区域所示. 在给定可靠度,如  $R = 0.8$  时,若计算得积分面积不小于 0.8,则模型可给出保守估计.

由于  $d_i$  是  $R$  的函数,所以式 (3) 中被积函数是  $u$  和  $R$  的函数:

$$v = v(u, R) = F_2[d_1 + d_2 - F_1^{-1}(u)] \tag{4}$$

令曲线下方的面积为  $\Pi(R)$ ,则有

$$\Pi(R) = \int_0^1 v(u, R) dR \tag{5}$$

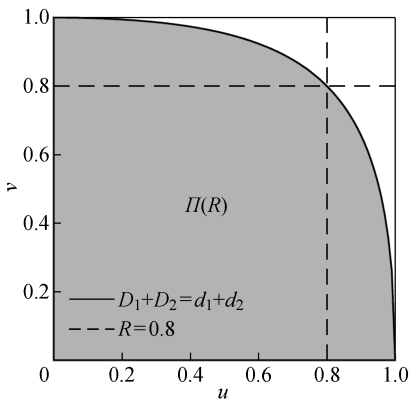


图 1 保守估计的几何解释

Fig. 1 Geometric illustration of conservative estimation condition

式 (1) 成立等价于  $\Pi(R) \geq R$ .

对于具有位置参数和尺度参数的分布,设  $\lambda_i, \delta_i$  分别为两分布的位置参数与尺度参数,令  $F_i^*(x)$  为对应  $\lambda_i = 0, \delta_i = 1$  标准分布的 CDF,则  $F_i(x) = F_i^*[(x - \lambda_i)/\delta_i]$ ,代入式 (4) 可得

$$v = F_2^*[d_2^* + \eta d_1^* - \eta F_1^{*-1}(u)] \tag{6}$$

式中:  $\eta = \delta_1/\delta_2; d_i^*$  为对应标准分布的可靠度  $R$  的分位数. 式 (6) 表明曲线  $v = v(u, R)$  只与分布尺度参数的比值有关,而与位置参数无关,这在很大程度上减少了参数空间的维度.

2 常见损伤分布的保守估计条件

目前的损伤累积模型均假设各级载荷下的损伤服从仅参数不同的同族分布. 上节讨论的一般模型不受此假设的限制. 为将本文理论应用到已有的概率损伤模型,下文针对一些常见的分布族计算其可靠度保守估计的具体条件.

2.1 指数分布

损伤服从指数分布,即  $D_i \sim F_i(x) = 1 - \exp(-x/\theta_i), x \geq 0$ ,其中  $\theta_i$  为尺度参数. 则有

$$\left. \begin{aligned} F^* &= 1 - e^{-x}, & \text{即 } F_i^*(x) \\ x &= -\ln(1 - F^*), & \text{即 } F_i^{*-1}(x) \\ d_i^* &= -\ln(1 - R) \\ \eta &= \frac{\theta_1}{\theta_2} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

将式 (7) 代入式 (6) 和 (5) 得

$$\Pi(R) = \int_I 1 - \exp[d_2^* + \eta d_1^* - \eta \ln(1 - u)] du =$$
$$\int_I 1 - \frac{(1 - R)^{1+\eta}}{(1 - u)^\eta} du \tag{8}$$

式中:  $I$  是满足  $d_2^* + \eta d_1^* - \eta \ln(1 - u) \geq 0$  的积分区域. 由对称性可知,交换  $D_1$  和  $D_2, \Pi(R)$  的值不

变,即  $\eta$  与  $1/\eta$  对应的  $\Pi(R)$  相同,因此只需考虑  $\eta \in (0,1]$  的情况.

图 2 为  $\eta = 1$  时的  $\Pi(R)$  图像,图中  $R_p$  为方程  $\Pi(R) = R$  的解,可利用数值方法求得.可以看出,当  $R \geq R_p$  时,式(1)成立.图 3 为  $\eta$  取不同值时  $R_p$  的变化趋势.可以看出,  $\eta = 1$  时  $R_p$  的最大值约为 0.715 3.工程应用中,即使分布参数的取值未知,也可用  $R \geq 0.715 3$  获得总损伤的保守估计,本文称满足此特点的条件为一致可用的保守估计条件.

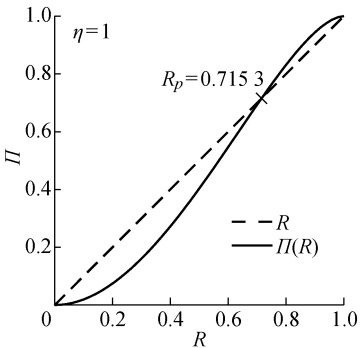


图 2  $\Pi(R)$  与  $R$  的关系图

Fig. 2 Relationship between  $\Pi(R)$  and  $R$

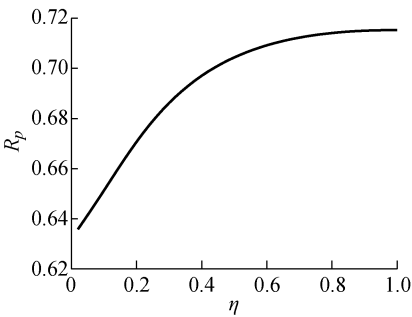


图 3  $R_p$  与  $\eta$  的关系图

Fig. 3 Relationship between  $R_p$  and  $\eta$

2.2 对数正态分布

损伤服从对数正态分布,即  $D_i \sim \Phi[(\ln x - \mu_i)/\sigma_i]$  ( $x > 0$ ),其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布的 CDF;  $\mu_i$  为对数均值;  $\sigma_i$  为对数标准差.  $\ln x - \mu_i = \ln[x/\exp(\mu_i)]$ ,所以  $\exp(\mu_i)$  是尺度参数,按本文约定  $\eta = \exp(\mu_1 - \mu_2)$ .由于求解  $\Pi(R) \geq R$  时需考虑  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\eta$  不同取值的组合,所以对数正态分布下的求解与指数分布下的求解具有明显区别.参数较多时,若没有一致可用的保守估计条件,将大大增加工程应用的难度.

视  $R_p$  为参数的函数,观察  $R_p(\sigma_1, \sigma_2, \eta)$  的计算结果发现,当  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  时,  $R_p$  是  $\eta$  的增函数,如图 4 所示.此外,无论  $\eta$  取何值,  $R_p$  是  $\sigma_i$  的增函数.取  $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ ,则有

$$R_p(\sigma_1, \sigma_2, \eta) \leq R_p(\sigma, \sigma, \eta) \leq R_p(\sigma, \sigma, 1) \quad (9)$$

利用上式可计算仅与  $\sigma$  相关的保守估计条件.

图 5 为  $\eta = 1$  时  $R_p$  的图像.可以看出,  $R_p$  为  $\sigma$  的增函数,  $\sigma = 1$  时  $R_p$  略小于 0.8.

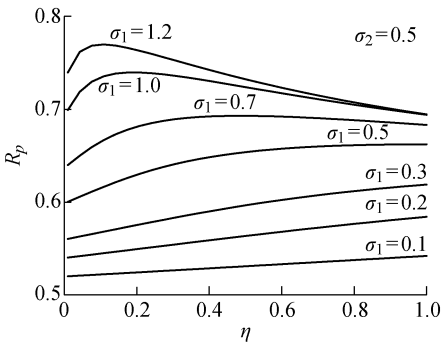


图 4  $R_p$  与  $\eta$  的关系图

Fig. 4 Relationship between  $R_p$  and  $\eta$

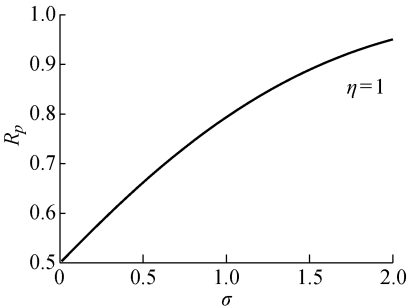


图 5  $R_p$  与  $\sigma$  的关系图

Fig. 5 Relationship between  $R_p$  and  $\sigma$

损伤服从对数正态分是应用本文理论计算保守估计条件的典型例子,有以下几点需要说明:

- (1)  $R_p$  并不总是  $\eta$  的增函数.对于复杂的分布,要考虑各个参数对总损伤分布的影响.
- (2) 对于较大的  $\sigma$ ,保守估计的条件可能很苛刻.如  $\sigma = 2$  时  $R_p \approx 0.95$ ,此情况建议使用其它方法估计可靠损伤.
- (3) 通常损伤的对数标准差小于 1,此时可一致使用  $R \geq 0.8$  进行保守估计.

2.3 其他常见分布

经计算可知,当损伤分布服从正态分布时,总有  $R_p = 0.5$ .故可一致使用  $R \geq 0.5$  进行保守估计.

实践表明,当损伤服从 Weibull 分布时,不同载荷下损伤分布的形状参数 ( $\beta$ ) 为常数,即  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .由于  $R_p$  是  $\beta$  的减函数,所以  $\beta \geq 1$  时,可一致使用  $R \geq 0.715 3$  进行保守估计.

负 Weibull 分布也称第 3 型广义极值分布,目前很少用于损伤建模.但 Castillo<sup>[6]</sup> 的理论研究表明,在相对一般的条件下损伤必然服从第 3 型广义

极值分布,因此该分布有较高的理论价值,此时  $R_p$  是  $\beta$  的增函数,当  $\beta \leq 10$  时,可一致用  $R \geq 0.5782$  进行保守估计,当  $\beta \leq 3.5$  时,总有  $R_p \leq 0.5$ . 此外,当  $\beta$  增大时,  $R_p$  的增大并不明显,如果损伤服从此分布有必然性,则此特性可从统计学角度解释为何 Miner 法则总能给出偏差不大的损伤估计.

表 1 为常见分布的一致可用保守估计条件.

表 1 常见分布的一致可用保守估计条件  
Tab. 1 Uniform conditions of conservative estimation for common distributions

损伤分布	$F_i(x)$	一致可用的保守估计条件
指数分布	$1 - e^{-x/\theta_i}$	$R \geq 0.72$
对数正态分布	$\Phi\left(\frac{\ln x - \mu_i}{\sigma_i}\right)$	$R \geq 0.8, \max\{\sigma_i\} \leq 1$
正态分布	$\Phi\left(\frac{x - \mu_i}{\sigma_i}\right)$	$R \geq 0.5$
Weibull 分布	$1 - e^{-\left(\frac{x - \lambda_i}{\delta_i}\right)^\beta}$	$R \geq 0.72, \beta \geq 1$
负 Weibull 分布	$1 - e^{-\left(-\frac{x - \lambda_i}{\delta_i}\right)^\beta}$	$R \geq 0.58, \beta \leq 10$

3 应用举例

上文讨论的仅为两级加载情况下保守估计成立的条件. 原则上,本方法可以推广到  $k$  级加载的情况,但  $k$  级加载要计算多重积分,因此计算效率较低. 由正态分布的可加性知,无论  $k$  取何值,总有

$R_p = 0.5$ . 若损伤服从其它分布,当  $k \rightarrow \infty$  时,根据中心极限定理,  $D$  依分布收敛于某正态分布,从而  $R_p$  收敛至 0.5. 以损伤服从 Weibull 分布为例,对应  $k = 2, 3, 4$  以及  $\eta_i = 1$  时  $R_p$  的计算结果见表 2. 可以看出,当  $R_p > 0.5$  时,  $R_p$  为  $k$  的减函数. 因此,无论  $k$  取何值,总可一致使用  $k = 2$  时的条件进行可靠度保守估计. 而  $R_p \leq 0.5$  时总可使用  $R \geq 0.5$  来进行保守估计.

分别采用 Miner 线性损伤模型和 Zhu 等<sup>[7]</sup> 的损伤模型进行损伤计算. 由文献[7]中数据估得某钢材的  $S-N$  曲线的方程为

$$NS^{7.01} = 2.45 \times 10^{24} \tag{10}$$

文献[7]认为在恒幅载荷下材料的寿命服从对数正态分布(LN),即

$$N \sim LN(\mu_N, \sigma_N) \tag{11}$$

式中:  $\mu_N$  为对数均值,  $\mu_N = \log N$ , 可由式 (10) 计算而得. 为简化计算,本文假设变异系数( $\gamma$ ) 不随  $S$  变化,  $\gamma = \sigma_N / \mu_N$ . 由文献[7] 中数据估得  $\gamma = 0.0549$ . 文献[7] 进一步推导出恒幅载荷循环作用  $n$  次所得损伤  $D(n)$  也服从对数正态分布:

$$D(n) \sim LN(\ln n - \mu_N, \sigma_N \frac{\ln n}{\ln N}) \tag{12}$$

表 3 为 1 个 6 级谱的 90%、80% 和 50% 可靠损伤的计算过程. 其中  $N_a$  ( $a = 90, 80$ ) 为  $a\%$  的可靠寿命,即  $P(N \geq N_a) = a\%$  的分位点;  $d_b$  ( $b = 90, 80, 50$ ) 为  $b\%$  的可靠损伤,即  $P(D \leq d_b) = b\%$  的分位点. 由

表 2  $R_p$  随  $k$  的变化  
Tab. 2 Variation of  $R_p$  with  $k$

$k$	$R_p$				
	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3.5$	$\beta = 10$
2	0.873 80	0.715 33	0.573 92	0.495 32	0.421 79
3	0.860 09	0.700 84	0.568 21	0.496 68	0.428 15
4	0.850 39	0.691 94	0.564 90	0.497 26	0.431 91

表 3 不同可靠度下损伤的计算  
Tab. 3 Damage calculations under different reliability

$S/\text{MPa}$	$n \times 10^{-6}$	$n/N_{90}$	$d_{90}$	$n/N_{80}$	$d_{80}$	$n/\bar{N}$	$d_{50}$
200	1.00	0.020 7	0.014 3	0.013 1	0.010 3	0.005 4	0.005 4
250	0.80	0.071 0	0.054 1	0.046 5	0.038 9	0.020 7	0.020 7
300	0.25	0.072 8	0.055 8	0.049 2	0.041 4	0.023 3	0.023 3
350	0.10	0.079 5	0.061 7	0.055 2	0.046 7	0.027 4	0.027 4
400	0.05	0.094 8	0.074 9	0.067 3	0.057 7	0.035 0	0.035 0
450	0.01	0.040 8	0.030 5	0.029 6	0.024 4	0.015 9	0.015 9
合计	2.21	0.380 0	0.291 0	0.261 0	0.220 0	0.128 0	0.128 0

式(10)计算得出的寿命为均值寿命 $\bar{N}$ ,则 $n/\bar{N}$ 即为传统的 Miner 数。

由表1可知,对数正态分布的可靠度保守估计条件为 $R \geq 0.8$ .即按80%和90%可靠度计算的损伤是保守的(偏大);而按50%或按传统 Miner 法则计算的损伤则偏小.假设损伤服从对数正态分布,则按 Monte-Carlo 法模拟的90%,80%,50%的可靠损伤分别为0.222,0.193,0.150,还可用 $\sum n/\sum D$ 进行可靠寿命的大致估算.如本例对应 Miner 法则、Zhu 模型和 Monte-Carlo 模拟估得的80%可靠寿命分别为 $8.46 \times 10^6$ 、 $10.06 \times 10^6$ 和 $11.44 \times 10^6$ ,从而验证了本文方法的保守性。

图6为 $k=6$ 时, Monte-Carlo 法计算得出总损伤的实际分布和中心极限定理(CLT)计算得出渐近分布的对比.可以看出,渐近分布与实际分布较为接近.但在可靠度要求较高的区域,如 $R \geq 0.9$ 时,渐近分布给出的可靠度高于实际分布.这意味着用渐近分布进行可靠度评估无法保证计算结果的保守性。

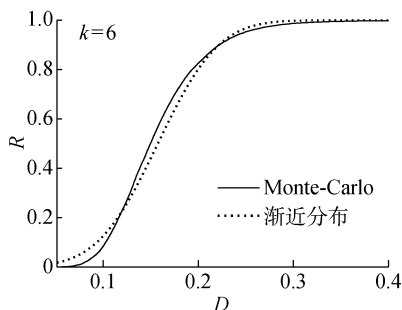


图6  $k=6$ 时 Monte-Carlo 模拟结果与 CLT 结果的对比

Fig. 6 Comparison between the results calculated by Monte-Carlo method and CLT while  $k=6$

本文的出发点是在各级损伤分布已知的情况下进行总损伤的可靠度估计.目前已有许多概率化的累积损伤模型,结合这些模型为损伤建模后即可应用文本方法对可靠度进行保守估计。

具体应用时,由于对损伤的参数进行统计推断可能会产生误差,所以本文推导了一些常见分布一致可用的保守估计条件.只要采用的分布对损伤有较好的拟合优度,即使其参数估计有一定出入,也不影响其保守推断。

此外,无论使用本文方法还是中心极限定理,都要求各级载荷下的损伤相互独立.若认为损伤间存在依赖关系,如不同的加载顺序对总损伤有较大影

响,则需使用其它方法进行可靠度估计。

## 4 结语

统计学角度认为 Miner 法则总可以给出偏差不大的损伤均值估计.但理论推导和数值算例表明,直接使用 Miner 法则或中心极限定理等方法求得的总损伤可能是非保守的,因此其在可靠度要求较高的应用中受到限制。

当损伤服从的分布已知时,往往存在一致可用的保守估计条件.利用这类条件进行计算,可避免分布参数估计误差对可靠度保守性带来的影响.损伤分布的这种特性对减少甚至避免额外的参数实验有很大作用,因此本文研究有较好的理论意义和实际应用价值。

## 参考文献:

- [1] BIRNBAUM Z W, SAUNDERS S C. A probabilistic interpretation of Miner's rule[J]. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 1968, 16(3): 637-652.
- [2] LEEUWEN J. Miner's rule with respect to plain concrete[J]. **Heron**, 1979, 24(1): 1-34.
- [3] RATHOD V, YADAV O P, RATHORE A, et al. Probabilistic modeling of fatigue damage accumulation for reliability prediction[J]. **International Journal of Quality, Statistics, and Reliability**, 2011, 2011: 1-10.
- [4] SUN Q, DUI H N, FAN X L. A statistically consistent fatigue damage model based on Miner's rule [J]. **International Journal of Fatigue**, 2014, 69: 16-21.
- [5] BERETTA S, REGAZZI D. Probabilistic fatigue assessment for railway axles and derivation of a simple format for damage calculations [J]. **International Journal of Fatigue**, 2016, 86: 13-23.
- [6] CASTILLO E, FERNÁNDEZCANTELI A. A unified statistical methodology for modeling fatigue damage[M]. Berlin, Germany: Springer Science & Business Media, 2009.
- [7] ZHU S P, HUANG H Z, LI Y F, et al. Probabilistic modeling of damage accumulation for time-dependent fatigue reliability analysis of railway axle steels [J]. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit**, 2015, 229(1): 23-33.

(本文编辑:陈晓燕)