

文章编号:1006-2467(2019)02-0225-07

DOI: 10.16183/j.cnki.jsjtu.2019.02.014

# 欠约束多机协调吊运系统动力学工作空间分析

苏程, 叶佳楠, 李巍, 丁旺才, 赵志刚

(兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

**摘要:**针对多台吊机通过绳索协调吊运同一被吊运物形成的欠约束系统不满足力封闭条件而无法用矢量封闭原理求出其动力学工作空间的问题,利用牛顿-欧拉方程建立了系统的动力学数学模型,并利用 Farkas 和 Stiemke 引理将动力学工作空间的求解转换成是否存在超平面的问题.对该类欠约束系统动力学方程进行拆分,得到了动力学工作空间的求解方法.最后利用蒙特·卡罗方法进行了数值仿真,得到该类系统的动力学工作空间.仿真结果表明,被吊运物的加速度对动力学工作空间的影响不大.

**关键词:**多机器人系统;欠约束;绳牵引;工作空间

**中图分类号:** TP 242

**文献标志码:** A

## Analysis of Dynamic Workspace for Under-Constrained Coordinate Suspending System with Multi-Robots

SU Cheng, YE Jianan, LI Wei, DING Wangcai, ZHAO Zhigang

(School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** For the under-constrained system that multi-robots cooperatively tow a payload by cables, the dynamic workspace can't be found out by the principle of vector closure. The dynamic equations of the system were established by using the Newton-Euler equation. Then the geometric meaning of Farkas and Stiemke lemma and relationship with the dynamic equations of the system were introduced, and the solving of dynamic workspace was converted to the problem that whether there exists a hyper plane. For the under-constrained system, the dynamic equations also need to be split to get the dynamic workspace. Finally, simulations were conducted to validate the feasibility of the proposed method by Monte Carlo method, it validates that the payload acceleration has little effect on the dynamic workspace by comparing the two groups of simulation.

**Key words:** system of multi-robots; under-constrained; cable-driven; workspace

用小型吊运设备组合形成一个大负载紧耦合多机联合吊运系统,从实用性、经济性等方面考虑都是值得期待的.为了使系统结构简单,一般情况下该类紧耦合系统为典型的欠约束定位系统.可应用于战时桥梁的快速架设,以及民用桥梁的分段精确定位

架接等.从类型上讲,多机协调并联吊运系统属于柔索并联机器人系统,但与传统意义柔索并联机器人又有很大的区别,后者将柔索的一端固定做成特定的运动机构,通过调整柔索长度以实现被吊运物的期望运动位姿,其本质是一个单体机器人,故系统结

收稿日期:2017-05-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51265021,11462011)

作者简介:苏程(1977-),男,甘肃省靖远县人,副教授,主要研究方向为机械动力学. E-mail: sucheng@mail.lzjtu.cn.

构可重组性、通用性和模块化显得不足。多机协调并联吊运系统是由模块化串联吊运机构组成,模块化串联吊运机构可以是飞行机器人、工业机器人和常规起重设备等。欠约束多机协调吊运系统通过调整串联吊运机器人机构末端位置和柔索长度实现被吊运物的位姿,故欠约束多机协调吊运系统具有很大的灵活性、通用性和工作空间。

目前国内外关于欠约束多机协调吊运系统的研究刚刚起步,柔索并联机器人的研究成果可为该类多机器人系统的研究提供有价值的借鉴。欠约束多机协调吊运系统的一个主要研究方向是利用多架无人直升机来实现三维空间吊运操作。有许多学者探讨了多直升机吊运系统的运动学、动力学模型,并分析了系统的空间配置及稳定性<sup>[1-5]</sup>。

另一个研究方向为多地面机器人系统对物体的吊运操作。Zi 等<sup>[6]</sup>建立了 3 台起重机吊运一个重物的运动学和动力学模型,并分析了其工作空间,但只考虑了起重机末端的投影点始终保持正三角形的情況,且仅能变化绳长来改变重物姿态,起重机的末端是固定不动的,这种情况下多机系统与单体绳牵引并联机器人类似。也有学者应用运动旋量斜率对多机器人吊运系统的运动稳定性进行了研究<sup>[7]</sup>。近年来赵志刚等<sup>[8-12]</sup>建立了多机协调并联吊运系统的正逆运动学、动力学模型,并探讨各种构型下系统的求解方法,同时分析求解了系统的静态工作空间。

对于欠约束多机协调吊运系统来说,动力学工作空间可以拓宽系统的运动范围,到达一些特定的位姿,故研究系统的动力学工作空间是非常有必要的。动力学工作空间是指被吊运物满足动力学方程时,被吊运物质心所在的空间位姿的集合。文献[13]中利用 Farkas 和 Stiemke 引理对不完全约束和完全约束两类绳牵引并联机器人工作空间的边界进行了研究,其在仿真过程中,固定了参数值,这样只给出了二维的层图。本文将在其基础上,利用 Farkas 和 Stiemke 引理,求解前人研究较少的欠约束多机协调吊运系统的动力学工作空间,同时利用蒙特·卡罗方法,数值求解得到系统动力学工作空间的整体效果图。

## 1 系统动力学建模

图 1 所示为  $m$  台吊机通过绳索牵引  $n$  自由度被吊运物的示意图。图中,每个吊机末端通过一根绳索与被吊运物连接。绳索与吊机末端的连接点为  $P_m$ ,可通过改变连接点  $P_m$  的位置和改变绳长来实现被吊运物的位姿变化。绳索与被吊运物的连接点

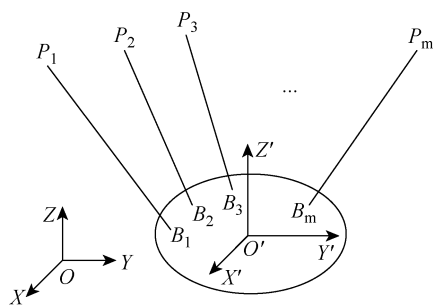


图 1 系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of system

为  $B_m$ 。

建立全局坐标系  $O-XYZ$ ,在被吊运物质心上建立局部坐标  $O'-X'Y'Z'$ 。被吊运物质心  $O'$  在全局坐标系  $O-XYZ$  的位置为

$$\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T \quad (1)$$

设被吊运物的质量为  $M$ ,重力加速度为  $g$ ,则重力用零节距的单位旋量在全局坐标系表示为

$$\mathbf{G} = -Mg[\mathbf{i} \ \mathbf{r} \times \mathbf{i}]^T, \quad \mathbf{i} = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (2)$$

被吊运物在全局坐标系的速度和角速度分别为

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\dot{\gamma} \ \dot{\beta} \ \dot{\alpha}]^T \quad (4)$$

被吊运物在局部坐标系中的惯性矩阵为  $\mathbf{I}$ ,则在全局坐标系中的惯性矩阵为

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}\mathbf{I}\mathbf{R}^T \quad (5)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{R}$  为局部坐标系相对于全局坐标系的旋转变换矩阵; $\gamma$ 、 $\beta$  和  $\alpha$  分别为局部坐标系相对于全局坐标系的  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴的旋转角度; $c$  和  $s$  分别为  $\cos$  和  $\sin$ 。设每根绳的张力分别为  $T_1, T_2, \dots, T_m$ ,对被吊运物利用牛顿-欧拉方程可得

$$\begin{bmatrix} M\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{G} + [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_m] \mathbf{T} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{I}_3$  为  $3 \times 3$  单位矩阵; $\mathbf{T} = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_m]$  为  $m$  根绳的拉力组成的  $m$  维列矩阵。

对式(7)进行变形,则被吊运物的动力学方程可表示为

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{C} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{C}$  为  $n$  维列矩阵,表示作用在被吊运物上的所有外力旋量之和(包括被吊运物的重力、惯性力等),

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} M\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} - \mathbf{G} \quad (9)$$

满足

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_m] \in \mathbf{R}^{n \times m} \quad (10)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  是由  $m$  个旋量  $\mathbf{e}_i$  构成,

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{\|\mathbf{l}_i\|_2} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_i \\ (\mathbf{R}\mathbf{B}_i) \times \mathbf{l}_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_i &= \mathbf{P}_i - \mathbf{R}\mathbf{B}_i - \mathbf{r} \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (12)$$

式中:  $\mathbf{P}_i$  为机器人位置  $P_i$  在全局坐标系下的位置矢量;  $\mathbf{B}_i$  为绳与被吊运物的连接点  $B_i$  在全局坐标系下的位置矢量。

## 2 动力学工作空间条件分析

首先对  $m \geq 1+n$  时的过约束、完全约束系统和  $m = n$  时的不完全约束系统的动力学工作空间做简要分析。随后主要讨论  $m < n$  的欠约束系统的动力学工作空间。

(1) 当  $m \geq 1+n$  时,可利用矢量封闭原理的求解方法,结合蒙特·卡罗算法随机产生单个机器人工作范围内的位置坐标或者利用扫描法逐行产生单个机器人的位置坐标。当  $m \geq 1+n$  时满足矢量封闭原理的条件,在结构矩阵  $\mathbf{A}$  不发生降秩的条件下,  $\mathbf{AT} = \mathbf{C}$  可以转换成如下形式:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^+ \mathbf{C} + (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}^+ \mathbf{A}) \mathbf{k} \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{A}^+$  为结构矩阵  $\mathbf{A}$  的 M-P 伪逆;  $\mathbf{k}$  为  $m$  维的任一向量;  $\mathbf{I}_m$  为  $m \times m$  的单位矩阵。要保证每根绳的拉力  $T_i$  都大于零,根据矩阵的相关知识,只要式(13)中的右边第2项足够大时,就能使  $\mathbf{T}$  中的每个元素都为正。因此,  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ \mathbf{A})$  中每个元素都为正时,能保证  $\mathbf{T}$  中的每个元素都为正。

(2) 当  $m = n$  时,可以将重力看成一根特殊的虚拟绳索,该绳的方向始终为重力方向,拉力大小为重力大小,这样相当于有  $m+1$  根绳,使其满足力封闭条件,这时动力学方程可变换成:

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{j}] \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ M\mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{j} = [0 \quad 0 \quad -1 \quad -y \quad x \quad 0]^T$ 。这样也可以利用力封闭求解算法,并结合蒙特·卡罗算法随机产生单个机器人工作范围内的位置坐标或者利用扫描法逐行产生单个机器人的位置坐标。

(3) 当  $m < n$  时,属于欠约束,不满足力封闭条件,与此相关的研究较少。本文重点研究欠约束时的动力学工作空间,通过 Farkas 和 Stiemke 引理求解  $m < n$  时的动力学工作空间,同时利用蒙特·卡罗算法或扫描法,即可得到整体的效果图。

由于动力学方程  $\mathbf{AT} = \mathbf{C}$  的形式满足动力学空

间的标准是每根绳的拉力都大于零(即  $T > 0$ ),在研究过程中可以考虑  $T = 0$  的时候作为工作空间的边界,所以动力学工作空间的条件可以表述为

$$\mathbf{AT} = \mathbf{C}, \quad T \geq 0 \quad (15)$$

本文基于 Farkas 和 Stiemke 引理分析欠约束多机器人绳牵引系统的动力学工作空间条件:

(1) 基于 Farkas 引理分析。设  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^n$ , 则下面 2 组关系式:

$$\mathbf{AT} = \mathbf{C}, \quad T \geq 0 \quad (16)$$

$$\exists \mathbf{q} \text{ 使 } \mathbf{A}^T \mathbf{q} \leq 0, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{q} > 0 \quad (17)$$

有且仅有一组有解。

Farkas 引理的几何解释是考虑  $\mathbf{q}$  作为一个分离超平面的法向量,这个超平面分离了 2 个集合,一个是由  $\mathbf{A}$  中各个列向量组合而成的凸锥,另外一个为向量  $\mathbf{C}$ 。这个凸锥是  $\mathbf{A}$  中所有单位旋量  $\mathbf{e}_i$  组成的空间。如果向量  $\mathbf{C}$  不属于这个凸锥的空间,则说明这个超平面存在,这样式(17)有解,也就说明式(16)无解。因此,要使动力学工作空间的条件成立,即式(16)有解,就必须不能形成分离的超平面。

这其中有一种特殊情况,  $\mathbf{C}$  位于超平面上,这样  $\mathbf{C}^T \mathbf{q} = 0$ , 显然式(17)无解,这样式(16)也有解。由于  $\mathbf{q}$  是法向量,是一些向量的叉积而成,不可能为零向量,对于  $\mathbf{C}^T \mathbf{q} = 0$ , 会有 2 种情况:①  $\mathbf{C} \neq 0$ , 这样会导致部分的绳拉力大小为零,可以作为工作空间的边界。②  $\mathbf{C} = 0$ , 零向量必共面,如果  $\mathbf{C} = 0$ , 则式(15)变成了如下形式:

$$\mathbf{AT} = 0, \quad T \geq 0 \quad (18)$$

从式(18)可以看出,总存在一组解  $T = 0$  使式(18)成立。如果  $T = 0$  即每根绳的张力都为 0,但从实际的角度,不可能每根绳的张力都为 0 却对被吊运物实施牵引运动。因此,式(18)将变成如下形式:

$$\mathbf{AT} = 0, \quad T > 0 \quad (19)$$

对于式(19)可以利用 Stiemke 引理进行分析。

(2) 基于 Stiemke 引理分析。设  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , 则下面 2 组关系式:

$$\mathbf{AT} = 0, \quad T > 0 \quad (20)$$

$$\exists \mathbf{q} \text{ 使 } \mathbf{A}^T \mathbf{q} \geq 0, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{q} \neq 0 \quad (21)$$

有且仅有一组有解。

Stiemke 引理的几何解释是考虑  $\mathbf{q}$  作为一个支撑超平面的法向量,使凸锥  $\mathbf{A}$  位于这个支撑超平面的一边。如果这个支撑超平面存在,这样式(21)有解,也就说明式(20)无解。因此,要使动力学工作空间的条件成立,即式(20)有解,就必须不能形成支撑超平面。

总之,通过对 Farkas 和 Stiemke 引理的几何解

释可以看出,要使达到动力学工作空间的条件即式(16)或式(20)有解,就不能形成分离超平面或支撑超平面。

### 3 欠约束系统动力学工作空间求解

#### 3.1 求解方法

动力学工作空间的求解方法是先通过动力学方程组判断属于哪类超平面,再利用单位旋量  $\mathbf{e}_i$  通过不同的组合形成待测定的超平面,然后再测试剩余的单位旋量  $\mathbf{e}_i$  和  $\mathbf{C}$  来判断待测定的超平面是否是分离超平面或支撑超平面,在测试的过程中需要测试所有可能的组合形式,来排除形成分离超平面或支撑超平面的可能性。具体测试步骤如下:

(1)  $\mathbf{A}$  是由  $m$  个单位旋量  $\mathbf{e}_i$  构成,每个单位旋量是一个  $n$  维的列向量。由于超平面是  $n-1$  维子空间的平移,因此,待测定的超平面由  $n-1$  个线性无关的单位旋量构成,超平面的法向量是  $n-1$  个单位旋量的叉积,可以表示为

$$\mathbf{q} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \cdots & \mathbf{k}_n \\ \mathbf{e}_{1,1} & \cdots & \mathbf{e}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{(n-1),1} & \cdots & \mathbf{e}_{(n-1),n} \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中:  $\mathbf{k}_n$  为标准的基向量;  $\mathbf{e}_{i,j}$  为第  $i$  个单位旋量的第  $j$  个元素。

(2) 根据 2 个引理测试待测定的超平面是不是分离超平面或支撑超平面:

① 根据 Farkas 引理,测试形成法向量  $\mathbf{q}$  后所有剩余的单位旋量  $\mathbf{e}_i$  和  $\mathbf{C}$  是否分别位于超平面的两边,可以通过计算不等式  $\text{sgn}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{q}) \neq \text{sgn}(\mathbf{C}^T \mathbf{q})$  是否成立来判断。如果成立,则说明分离超平面存在,反之,则不存在。测试过程中,需要分别计算没有用来形成法向量  $\mathbf{q}$  的单位旋量。

② 根据 Stiemke 引理,测试形成法向量  $\mathbf{q}$  后所有剩余的单位旋量是否位于超平面的一边,可以通过计算等式  $\text{sgn}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{q}) = \text{sgn}(\mathbf{e}_j^T \mathbf{q})$  是否成立来判断,其中  $i \neq j$ 。如果成立,则说明支撑超平面存在,反之,则不存在。测试过程中,需要分别计算没有用来形成法向量  $\mathbf{q}$  的单位旋量。

(3) 如果测试待测定的超平面不是分离超平面或者支撑超平面,则需要重复步骤(2),测试所有形成法向量  $\mathbf{q}$  的组合形式和剩余的单位旋量。因此,对于 Farkas 引理能形成  $C_m^{-1}$  种法向量  $\mathbf{q}$ ,需计算  $\text{sgn}$  共  $C_m^{-1} \times (m-n+2)$  次,判断不等式是否成立共  $C_m^{-1} \times (m-n+1)$  次。对于 Stiemke 引理能形成  $C_m^{-1}$  种

法向量  $\mathbf{q}$ ,需计算  $\text{sgn}$  共  $C_m^{-1} \times (m-n+1)$  次,判断等式是否成立共  $C_m^{-1} \times C_{m-n+1}^2$  次。只有待测定的超平面都不是分离超平面或者支撑超平面,则说明式(16)或式(20)有解,也就说明被吊运物在这种位姿下,满足动力学工作空间的条件。

#### 3.2 特殊情况分析

在测试的过程中存在  $\text{sgn}=\mathbf{0}$  的特殊情况,对于 Farkas 引理,如上述提及的当  $\mathbf{C}$  位于超平面上的情况,这样  $\text{sgn}(\mathbf{C}^T \mathbf{q})=\mathbf{0}$ 。由于法向量  $\mathbf{q}$  是  $n-1$  个单位旋量的叉积构成,同时  $\mathbf{A}$  中的单位旋量是线性无关的,所以  $\mathbf{q}$  不可能为零向量。那么存在  $\text{sgn}=\mathbf{0}$  的特殊情况的原因除了上述提到的  $\mathbf{C}=\mathbf{0}$  时的情况,另一种解释是  $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ ,但位于超平面上,剩余没有形成  $\mathbf{q}$  的单位旋量必位于超平面的一边。由于  $\mathbf{AT}=\mathbf{C}$ ,是由单位旋量通过非负的组合形成  $\mathbf{C}$ ,同时单位旋量不可能为零向量,但是位于超平面一边的剩余单位旋量非负组合形成一个向量时不可能与超平面共面,也就不能形成超平面上的  $\mathbf{C}$ ,因此只可能是剩余的单位旋量对应的  $\mathbf{T}$  中部分拉力为零。对于部分拉力为零的情况,可以作为工作空间的边界。同理,对于 Stiemke 引理时,一些剩余单位旋量位于超平面上,可考虑部分绳拉力为零,这样虽不满足式(19),但能使式(15)成立。

在特殊情况测试中,除了能形成法向量  $\mathbf{q}$ ,还需要计算剩余的单位旋量  $\text{sgn}$ ,因此,对于 Farkas 引理,应满足  $m-n+1 \geq 1$ ,即  $m \geq n$ 。对于 Stiemke 引理,应满足  $m-n+1 \geq 2$ ,即  $m \geq n+1$ 。因此,当  $m \geq n$  时,可以直接利用 Farkas 引理或者 Stiemke 引理。但是本文研究的欠约束时即  $m < n$  的情况显然不满足要求,再看动力学方程式(7),利用了牛顿-欧拉方程,可以拆成 2 部分,如牛顿方程和欧拉方程,由于动力学方程式(7)是个耦合的方程组,因此拆成 2 部分后,牛顿方程和欧拉方程需要同时满足。

$m=1$  或  $m=2$  时很难实现对被吊运物的控制,故主要研究的是  $m \geq 3$  且  $3 < n \leq 6$  的欠约束。由于  $n$  最大为 6,拆成牛顿方程和欧拉方程 2 部分后会有 2 组  $\mathbf{AT}=\mathbf{C}$  形式的方程组(未拆分前,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ),每组中  $\mathbf{A}$  的行数可最多为 3 行,同时每组中  $\mathbf{A}$  的行数不能少于 2 行。由于  $m \geq 3$ ,显然达到了利用 Farkas 引理的条件  $m \geq n$ (拆分后,  $2 \leq n \leq 3$ )。

对于 Stiemke 引理的条件  $m \geq n+1$ ,部分情况下无法使用;同时也可以看出,当  $\mathbf{C}=\mathbf{0}$  时,使用的范围也有局限,适用于被吊运物的重力、惯性力等被其它外力平衡掉或者为零。

## 4 动力学工作空间计算分析

### 4.1 计算步骤

在仿真过程中,对于 Farkas 引理,可以给定被吊运物的位移加速度、角速度、角加速度的范围,再利用蒙特·卡罗方法随机产生被吊运物的位移加速度、角速度、角加速度具体值,这样  $C$  就已知了. 动力学工作空间的仿真步骤如下:

(1) 先通过已知条件判断是利用 Farkas 引理还是 Stiemke 引理,将动力学方程拆分成 2 部分.

(2) 确定每个机器人的空间范围即  $P_m$  点的范围.

(3) 通过机器人的空间范围确定被吊运物的位置  $r$  范围和姿态范围. 对于 Farkas 引理,给定被吊运物的位移加速度、角速度、角加速度的范围.

(4) 利用蒙特·卡罗方法随机循环  $N$  次,每次循环随机产生每个机器人的位置  $P_m$ 、被吊运物的位姿和被吊运物的位移加速度、角速度、角加速度.

(5) 在每次循环周期内,计算出每根绳长,并分别计算出拆分后的 2 组结构矩阵  $A$ ,判断  $A$  是否发生降秩. 如果发生降秩,本循环停止,进入下一循环. 如果不发生降秩,则对试待测定的超平面进行判断,是否为分离超平面或者支撑超平面. 如果是,则本循环停止,进入下一循环. 如果不是,则重复测试,直到测试完该循环下的全部组合形式都不是分离超平面或者支撑超平面,同时拆分后的 2 组方程组应同时满足要求,否则本循环停止,进入下一循环.

(6) 每次循环周期内,如果全部组合形式下都不是分离超平面或者支撑超平面,则此次循环内,被吊运物的质心位置属于动力学工作空间的点,记录下此时的空间坐标.

(7) 重复步骤(5)和(6),直至  $N$  次循环完成,最后输出动力学工作空间的图形.

### 4.2 仿真结果分析

为了实验的方便性和安全性,以 3 台直角坐标机器人协同吊运 6 自由度被吊运物为实体实验平台,单个直角坐标机器人末端的工作空间范围为长方体. 设直角坐标系机器人  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  方向的长度分别为 0.8、0.5 和 0.5 m. 在地面上建立全局坐标系,每个机器人  $Z$  轴方向高度为 1.5 m. 3 台机器人在全局坐标系中  $XOY$  平面摆放示意图如图 2 所示.

设被吊运物为一正三角形物体,三角形的顶点分别为  $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$ ,也是绳索与被吊运物的连接点,三角形中心到各顶点的距离  $d=0.1$  m,被吊运物的质量  $M=10$  kg. 每个机器人末端点  $P_m$  的空间

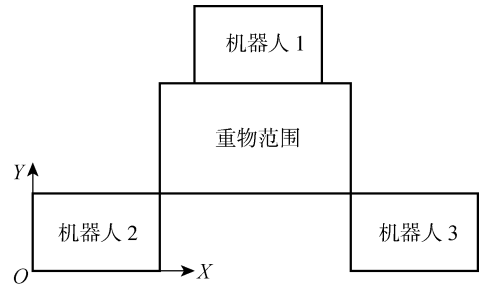


图 2 3 台机器人  $XOY$  平面示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the  $XOY$  plane of the three robots

范围和初设的被吊运物质心  $O'$  的空间范围在全局坐标系中的表达式:

$$\left. \begin{aligned} 1.5 \text{ m} &\leq P_{x1} \leq 2.5 \text{ m} \\ 2.5 \text{ m} &\leq P_{y1} \leq 3 \text{ m} \\ 1.5 \text{ m} &\leq P_{z1} \leq 2 \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq P_{x2} \leq 1 \text{ m} \\ 0 &\leq P_{y2} \leq 0.5 \text{ m} \\ 1.5 \text{ m} &\leq P_{z2} \leq 2 \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} 3 \text{ m} &\leq P_{x3} \leq 4 \text{ m} \\ 0 &\leq P_{y3} \leq 0.5 \text{ m} \\ 1.5 \text{ m} &\leq P_{z3} \leq 2 \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ m} &\leq O'_x \leq 3 \text{ m} \\ 0.5 \text{ m} &\leq O'_y \leq 2.5 \text{ m} \\ 0.3 \text{ m} &\leq O'_z \leq 2 \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中:被吊运物的姿态角范围为  $[0, 1]$  rad;被吊运物的  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴方向位移加速度范围都为  $[-1, 1]$   $\text{m/s}^2$ ;被吊运物分别绕  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴转动的角加速度范围都为  $[0, 1]$   $\text{rad/s}^2$ ;被吊运物分别绕  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴转动的角速度范围都为  $[0, 1]$   $\text{rad/s}$ .

按照第 4.1 节中的动力学工作空间的计算步骤,共循环  $1 \times 10^5$  次,共得到 10 159 个满足要求的被吊运物的位置点. 被吊运物动力学工作空间整体效果图如图 3 所示. 该图是保证绳的拉力  $T \geq 0$  的

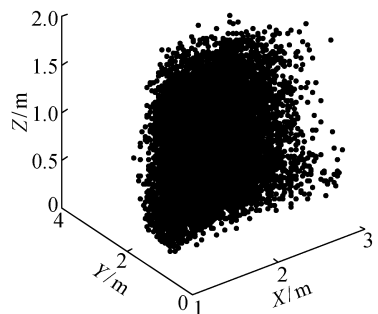


图 3 被吊运物的动力学工作空间

Fig. 3 Dynamic workspace of the payload

工作空间,因此是包括部分绳的拉力为零作为边界的工作空间.动力学工作空间在  $XOY$  平面、 $YOZ$  平面以及  $XOZ$  平面的投影图如图 4~6 所示.

从图 4 的  $XOY$  平面可以看出,工作空间整体大致关于  $y = x$  的平面对称,且离原点越远越密集.从

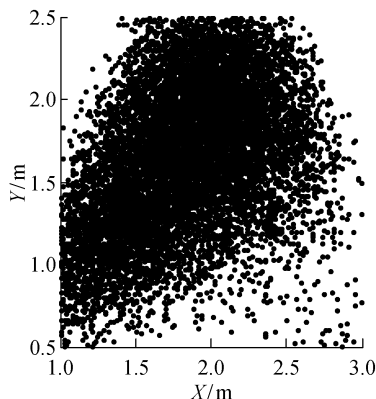


图 4  $XOY$  平面投影图

Fig. 4  $XOY$  plane projection

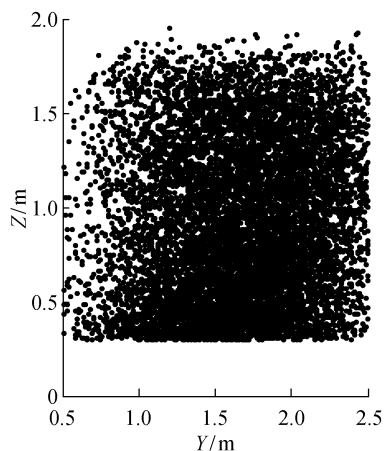


图 5  $YOZ$  平面投影图

Fig. 5  $YOZ$  plane projection

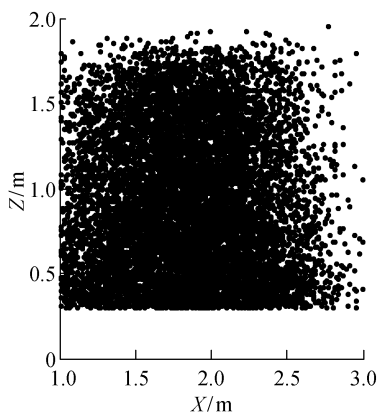


图 6  $XOZ$  平面投影图

Fig. 6  $XOZ$  plane projection

图 5 和图 6 可以看出,工作空间的下端比上端要密集些.

在仿真中,确定了空间参数以后,还限制了角速度、角加速度和线性加速度的范围,但上述动力学工作空间的分析中并没有限制绳索的拉力范围,只是需要判断拉力的正负.故可推断:在确定的空间和结构参数条件下,被吊运物角加速度和线性加速度的范围的变化对动力学工作空间影响不大.

为了验证以上推论再做一组仿真,将上述的被吊运物的  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴方向位移加速度范围都变为  $[-5, 5] \text{ m/s}^2$ ,被吊运物分别绕  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴转动的角加速度范围都变为  $[0, 2] \text{ rad/s}^2$ ,被吊运物分别绕  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴转动的角速度范围都变为  $[0, 2] \text{ rad/s}$ ,其他参数都不变,这样  $C$  的范围发生了变化.同样,按照第 4.1 节中的动力学工作空间的仿真步骤,共循环  $1 \times 10^5$  次,共得到 10 244 个满足要求的被吊运物的位置点.

分别对比 2 组仿真结果图,发现形状基本一样,满足要求的点的个数也相差不多.由于篇幅的限制,第 2 组仿真结果就不再图示.说明  $C$  的范围对动力学工作空间影响不大,这是因为动力学工作空间重点考虑的是保证绳的拉力  $T \geq 0$ ,至于绳的拉力具体多大未予考虑,同时从测试步骤中  $\text{sgn}$  的计算也可以看出,重点只考虑了符号的正负和是否形成分离超平面或者支撑超平面,大小则无关.因此, $C$  的范围只是影响绳的拉力值大小,而无法影响绳拉力的正负.

## 5 结论

通过对欠约束多机协调吊运系统动力学工作空间的分析,得出以下结论:

(1) 在动力学工作空间中,通过比较动力学方程与 Farkas 和 Stiemke 引理的关系,得出要使动力学工作空间的条件成立,就必须不能形成分离超平面或支撑超平面.

(2) 在动力学工作空间中,当系统为欠约束时,无法直接使用 Farkas 和 Stiemke 引理来求解动力学工作空间,但对  $m \geq 3$  时,可以通过拆分动力学方程进行调整,最后能够得到动力学工作空间.

(3) 通过对比不同被吊运物的加速度范围时的动力学工作空间仿真图,发现被吊运物的加速度对动力学工作空间影响不大.

## 参考文献:

- [1] MAZA I, KONDAK K, BERNARD M, *et al.*

- Multi-UAV cooperation and control for load transportation and deployment[J]. **Journal of Intelligent & Robot System**, 2010, 57: 417-449.
- [2] MICHAEL N, FINK J, KUMAR V. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots[J]. **Autonomous Robots**, 2011, 30(1): 73-86.
- [3] JIANG Q, KUMAR V. The inverse kinematics of 3-D towing [M]. Berlin: Springer Netherlands, 2010: 321-328.
- [4] JIANG Q M, KUMAR V. The inverse kinematics of cooperative transport with multiple aerial robots[J]. **IEEE Transactions on Robotics**, 2013, 29(1): 136-145.
- [5] ZHAO Z G, LU T S. Dynamics analysis of close-coupling multiple helicopters system[J]. **Chinese Journal of Aeronautics**, 2008, 21(1): 71-78.
- [6] ZI B, QIAN S. Design and dynamics of the cooperative cable parallel manipulators for multiple mobile cranes[J]. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, 2012, 9(10): 395-409.
- [7] 庄鹏, 姚正秋. 六自由度绳索悬挂式并联机器人工作空间和鲁棒性研究[J]. **机械科学与技术**, 2006, 25(3): 268-272.
- ZHUANG Peng, YAO Zhengqiu. Workspace and robustness study of six degree-of-freedom cable-suspended parallel robots[J]. **Mechanical Science and Technology**, 2006, 25(3): 268-272.
- [8] 赵志刚, 滕富军, 石广田, 等. 多机器人联合吊运系统可行域分析与求解[J]. **上海交通大学学报**, 2015, 49(8): 1174-1180.
- ZHAO Zhigang, TENG Fujun, SHI Guangtian, *et al.* Analysis and calculation on the feasible region of multi-robot combined lifting system[J]. **Journal of Shanghai Jiao Tong University**, 2015, 49(8): 1174-1180.
- [9] 李巍, 赵志刚, 石广田, 等. 多机器人并联绳牵引系统的运动学及动力学解[J]. **浙江大学学报**, 2015, 49(10): 1916-1923.
- LI Wei, ZHAO Zhigang, SHI Guangtian, *et al.* Solutions of kinematics and dynamics for parallel cable-driven system with multi-robot[J]. **Journal of Zhejiang University**, 2015, 49(10): 1916-1923.
- [10] WANG Y L, ZHAO Z G, LI J S, *et al.* Analysis of workspace of cable-typing close-coupling multi-robot collaboratively towing system[J]. **UPB Scientific Bulletin, Series D**, 2016, 78(4): 3-14.
- [11] LI W, ZHAO Z G, SHI G T, *et al.* Inverse dynamics analysis and simulation of a class of under-constrained cable-driven parallel system[J]. **UPB Scientific Bulletin, Series D**, 2016, 78(1): 87-98.
- [12] 赵志刚, 滕富军, 石广田, 等. 紧耦合多机器人联合吊运系统逆运动学求解[J]. **哈尔滨工程大学学报**, 2016, 37(2): 254-260.
- ZHAO Zhigang, TENG Fujun, SHI Guangtian, *et al.* The inverse kinematics analysis of multi-robot combined lifting system[J]. **Journal of Harbin Engineering University**, 2016, 37(2): 254-260.
- [13] STUMP E, KUMAR V. Workspaces of cable-actuated parallel manipulators[J]. **Journal of Mechanical Design**, 2006, 128(1): 159-167.